

**ÜBER DIE MINIMALE DIMENSION DER
ASSOZIIERTEN PRIMIDEALE DER KOMPLETION
EINES LOKALEN INTEGRITÄTSBEREICHES**

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der Philosophie

vorgelegt der

Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Basel

von

MARKUS BRODMANN

aus Ettingen

Basel 1974

aku-Fotodruck

**ÜBER DIE MINIMALE DIMENSION DER
ASSOZIIERTEN PRIMIDEALE DER KOMPLETION
EINES LOKALEN INTEGRITÄTBEREICHES**

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der Philosophie

vorgelegt der

Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Basel



von

MARKUS BRODMANN

aus Ettingen

Basel 1974

aku-Fotodruck

Genehmigt von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
auf Antrag der

Herren Professoren Dr. W. Habicht und Dr. M. Eichler

Basel, den 12. Februar 1974

Prof. Dr. E. Kellenberger

Dekan



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	pg. 1
1. Präliminarien	pg. 6
2. Subdimensionen, Dimensionsdefekte	pg. 12
3. Divisionsendlichkeit	pg. 15
4. Lokale komplette Ringe	pg. 22
5. Charakterische Ringe	pg. 28
6. Quasireguläre Folgen	pg. 34
7. Lokalitäten	pg. 41
Literatur	pg. 45

Einleitung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Kompletion R^* eines lokalen Integritätsbereiches R . Dabei interessiert uns besonders das "Zerfallen" des (0) -Ideals in R^* , d.h. die in R^* zu (0) assoziierten Primideale.

Dieser Frage kommt schon in der klassischen algebraischen Geometrie eine wichtige Bedeutung zu: Ist nämlich zum Beispiel V eine algebraische, affine Kurve, $P \in V$, und R der lokale Ring von V in P , so beschreibt das Zerfallen von R^* das Zerfallen von V in P in Zweige. Die in R^* zu (0) gehörigen Primideale entsprechen nämlich bekanntlich in eindeutiger Weise den Zweigen von V in P . Die Untersuchung von V mit analytischen Methoden entspricht somit der Untersuchung von R^* .

Dass sich von R^* auf R wichtige Rückschlüsse ziehen lassen, gilt nun nicht nur für die speziellen Ringe der klassischen Algebraischen Geometrie, sondern auch für allgemeine lokale Integritätsbereiche R . So sind die Beweise von vielen grundlegenden Eigenschaften noether'scher Integritätsbereiche unter Zuhilfenahme der Kompletion erbracht worden. (s. etwa [2], Chap. V) Insbesondere besteht etwa ein enger Zusammenhang zwischen dem Zerfallen des (0) -Ideals in R^* und den Primidealketten von R und endlichen R -Algebren (s. etwa [6], §3,4).

Die Untersuchung der Kompletion, insbesondere auch des Zerfallens ihres (0) -Ideals, ist somit auch von rein ringtheoretischem Interesse.

Besonders einfach zerfällt das (0) -Ideal in der Kompletion R^* der sogenannten (analytisch) ungemischten lokalen Integritätsbereiche R . Diese sind nämlich dadurch charakterisiert, dass alle in R^* zu (0) gehörigen Primideale dieselbe Dimension haben (s. [2] pg. 82), die dann gleich der Dimension von R ist (s. [2], (18.2)).

Beispielsweise sind die lokalen Integritätsbereiche der algebraischen Geometrie—die Lokalisierungen endlicher k -Algebren—ungemischt. (Ja es gilt sogar noch mehr: Diese Ringe sind zudem noch analytisch unverzweigt, das heisst, das (0) -Ideal in der Kompletion ist Durchschnitt von Primidealen) (s. [5], Vol. II,

pg. 317 , [2] (36.4))

Eine grundlegende Frage der kommutativen Algebra ist die, ob eine Eigenschaft von Ringen "geometrisch" ist, d.h., ob sie bei den in der algebraischen Geometrie üblichen Ringwechseln erhalten bleibt. Für lokale Integritätsbereiche sind diese Ringwechsel der Uebergang von R zu einer Lokalität R' über R (d.h. zur Lokalisierung einer endlichen, nullteilerfreien R -Algebra (s. [2], pg. 127)) und die Restklassenbildung nach Primidealen. Ob die Ungemischtheit in diesem Sinn geometrisch ist, ist ein offenes Problem. Immerhin hat Nagata 1956 in [3] gezeigt, dass die Ungemischtheit beim Uebergang zu Lokalitäten erhalten bleibt. Die Frage, ob dies auch für die Restklassenbildung nach Primidealen gilt, von Nagata ebenfalls in [3] gestellt (s. pg. 62, Problem 2), ist bis heute ungelöst.

Mit diesen beiden Fragen befasst sich nun die vorliegende Arbeit. Wir verallgemeinern zunächst die Frage nach der Ungemischtheit so, dass es uns möglich wird, die beiden obigen Fragen als Erhaltungssätze für beliebige lokale Integritätsbereiche zu formulieren. Dies geschieht so, dass wir dem lokalen Ring R das Minimum der Dimensionen aller Primideale von R^* zuordnen, die zu (0) gehören. Diese Grösse bezeichnen wir mit $\delta^*(R)$ und nennen sie die analytische Subdimension von R (s. Abschnitt 2). Weiter definieren wir als analytischen Dimensionsdefekt von R die Grösse $\Delta^*(R) = \dim(R) - \delta^*(R)$. Die Ungemischtheit von R drückt sich nun offenbar durch $\delta^*(R) = \dim(R)$, also $\Delta^*(R) = 0$ aus. Nun lässt sich die Frage, ob die Ungemischtheit eine geometrische Eigenschaft ist, verallgemeinern zu:

Sei R ein lokaler Integritätsbereich. Gilt dann

- (1) $\Delta^*(R) \geq \Delta^*(R')$, wo R' eine Lokalität über R ist?
- (2) $\Delta^*(R) \geq \Delta^*(R/\mathfrak{g})$, wo $\mathfrak{g}$ ein Primideal von R ist?

Die erste dieser Fragen werden wir bejahend beantworten (s. (7.1)), und somit den oben angeführten Satz von Nagata verallgemeinern, der durch den Spezialfall $\Delta^*(R) = 0$ beschrieben wird. Der Beweis allerdings erfolgt mit Methoden, die von denjenigen, die Nagata in [3] verwendet, völlig verschieden sind.

In (6.10) wird zunächst das folgende Teilproblem gelöst:

- (3) Ist R ein lokaler Integritätsbereich und $\mathfrak{g}$ ein Primideal von R , so gilt $\Delta^*(R_{\mathfrak{g}}) \leq \Delta^*(R)$.

Um (3) zu beweisen, werden wir $\delta^*(R)$ mit Hilfe spezieller Parametersysteme von R charakterisieren. Wir erweitern dazu den Begriff der R -regulären Folge (s. [1], pg.97) zum Begriff der R -quasiregulären Folge. (s. Abschnitt 6).

Im (6.12) zeigen wir dann, dass $\delta^*(R)$ gleich dem Maximum der Längen aller R -quasiregulären Folgen ist. Dieses Resultat ist interessant, weil es eine "analytische" Eigenschaft von R in Zusammenhang mit den Parametersystemen von R bringt.

Grundsätzlich wird hier auch sichtbar, welche Möglichkeiten zur Charakterisierung von lokalen Ringen die Parametersysteme geben. Wird etwa durch das Maximum der Längen der R -regulären Folgen die für homologische Untersuchungen wichtige Grösse $\text{depth}(R)$ definiert, so wird durch das Maximum der Längen der R -quasiregulären Folgen die "analytische" Grösse $\delta^*(R)$ gegeben. Schliesslich wird $\dim(R)$ durch die Maximale Länge aller Parametersysteme überhaupt gegeben.

(3) wird nun dadurch bewiesen, dass wir zeigen, dass es in $R_{\mathfrak{g}}$ eine $R_{\mathfrak{g}}$ -quasireguläre Folge der Länge $\delta^*(R) - \dim(R/\mathfrak{g})$ gibt (s. (6.8)).

Ähnlich wird dann auch der Fall einer beliebigen Lokalität R' anstelle von $R_{\mathfrak{g}}$ behandelt. (s. (7.2))

Die Untersuchung der quasiregulären Folgen basiert hauptsächlich auf dem in Abschnitt 3 eingeführten Begriff der Divisionsendlichkeit. Dabei heisst ein endlicher Modul M über dem noether'schen Ring R divisionsendlich, wenn $D = \bigcup (M:\alpha)_{Q(M)}$ ein endlicher R -Modul ist. Dabei ist $Q(M)$ der totale Quotientenmodul von M und α durchläuft alle Ideale mit einer Dimension $< \delta - 1$, wo δ das Minimum der Dimensionen der in M zu (0) assoziierten Primideale ist.

Wir zeigen nun in (5.2), dass die Kompletion eines lokalen Integritätsbereiches über sich selbst divisionsendlich ist. Dieses Resultat ist der Schlüssel zum Existenzbeweis für quasireguläre Folgen (6.8). Aus dieser Divisionsendlichkeit folgt aber auch ein Resultat, das auf die Frage (2) ein neues Licht wirft:

Es folgt nämlich, dass für alle, bis auf eventuell endlich viele Primideale $\mathfrak{g}$ vom Rang 1 des lokalen Integritätsbereiches R gilt $\Delta^*(R/\mathfrak{g}) \leq \Delta^*(R)$ (s. (5.9)).

Die Frage (2) (im Spezialfall $\Delta^*(R) = 0$) ist bisher so angegangen worden, dass Klassen von Ringen R gesucht wurden, für welche sie positiv zu beantworten war (s. [2], (34.9)). Hier wird jedoch bei beliebigem R eine Aussage über die Menge der uns interessierenden Primideale gemacht, nämlich diejenigen, für welche $\Delta^*(R/\mathfrak{g}) \leq \Delta^*(R)$.

Weiter ergibt sich aus (5.2) auch, dass R in seinem Quotientenkörper eine endliche, ganze Erweiterung R' besitzt, in welcher alle zu einem Hauptideal gehörigen Primideale eine Dimension $\geq \delta^*(R) - 1$ haben (s. (5.3)). Ist R ungemischt, so heisst das, dass in dieser Erweiterung R' kein echtes Hauptideal eingebettete Komponenten hat. Dies zeigt einen Zusammenhang zwischen der Klasse der lokalen, ungemischten Integritätsbereiche und der von U. Schweizer eingeführten Klasse K ([6], pg. 28). Auf diesen Zusammenhang werden wir in Abschnitt 5 näher eintreten (s. (5.11)).

Tatsächlich ist der Begriff der Divisionsendlichkeit aus dem Versuch entstanden, die Klasse K zu untersuchen.

Um die in Abschnitt 6 auftretenden Induktionen durchführen zu können, ist es nötig, die Klasse der Integritätsbereiche zu verlassen, und die Beweise in einer umfassenderen Klasse von Ringen zu führen, die wir charakteristische Ringe nennen.

R heisst dabei charakterisch, wenn für jedes Maximalideal $\mathfrak{m}$ von R $X(R/\mathfrak{m})1_R$ in R ein Nichtnullteiler oder 0 ist. Offenbar ist tatsächlich jeder Integritätsbereich charakterisch.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. W. Habicht für sein Interesse an dieser Arbeit und seine Anregungen danken. Ebenfalls möchte ich Herrn Dr. U. Schweizer danken, der mir durch seine Anregung, die Klasse K zu untersuchen, den Anstoss zu der Frage nach der Divisionsendlichkeit gab, und der die Entwicklung dieser Arbeit mit Interesse verfolgte.

1. Präliminarien

In diesem Abschnitt legen wir einige Bezeichnungen fest und führen eine Reihe von bekannten Resultaten der kommutativen Algebra an, auf die wir später immer wieder zurückgreifen werden.

Mit $R, R', R'', \dots$ etc. seien stets kommutative Ringe mit Einselement bezeichnet. Das Einselement von R wird, nötigenfalls, zur Unterscheidung mit 1_R bezeichnet.

$Q(R)$ sei der totale Quotientenring von R . Falls $R \subseteq R'$ bezeichnen wir mit $\text{der}_R(R)$ den ganzen Abschluss von R in R' . Für $\text{der}_{Q(R)}(R)$ schreiben wir kurz $\text{der}(R)$.

$\text{Spec}(R)$ sei die Menge der Primideale von R , $\dim(R)$ die Dimension von R (=Supremum der Längen n aller echten Primidealketten $\mathfrak{g}_0 \subsetneq \mathfrak{g}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{g}_n$ aus $\text{Spec}(R)$). Ist α ein Ideal von R , so bezeichnen wir mit $\text{rg}(\alpha)$ den Rang von α ($= \inf \{ \dim(R/\mathfrak{g}) \mid \alpha \subseteq \mathfrak{g} \in \text{Spec}(R) \}$).

Für das Jacobsonradikal von R (=Durchschnitt aller Maximalideale von R) schreiben wir $\text{Rad}(R)$. Ist α ein Ideal aus R , so steht $\sqrt{\alpha}$ für das Radikal von α ($= \bigcap \{ \mathfrak{g} \in \text{Spec}(R) \mid \alpha \subseteq \mathfrak{g} \} = \{ x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in \alpha \}$).

Ist R' eine R -Algebra, so sagen wir R' dominiere R (in Zeichen $R \leq R'$), wenn $R' \neq \alpha R'$ für jedes echte Ideal von R , und wenn für jedes Maximalideal $\mathfrak{m}'$ von R' $\mathfrak{m}' \cap R$ ein Maximalideal von R ist.

Ist M ein Modul, so bezeichnen wir mit $\text{NNT}_R(M)$ die Menge der Nichtnullteiler von R bezüglich M , mit $\text{NT}_R(M)$ jene der Nullteiler. Weiter kürzen wir ab $\text{NNT}_R(R) = \text{NNT}(R)$, $\text{NT}_R(R) = \text{NT}(R)$. Sei überdies $Q_R(M) = M_{\text{NNT}_R(M)}$ (= Lokalisierung von M nach allen Nichtnullteilern).

Ist $\text{NNT}(R) \subseteq \text{NNT}_R(M)$, so nennen wir M torsionsfrei über R .

Mit $\text{ann}_R(M)$ bezeichnen wir den Annullator von M , und $\dim_R(M)$ stehe für $\dim(R/\text{ann}_R(M))$.

Ist R noether'sch und M endlich über R , so bezeichnen wir mit $\text{Ass}_R(M)$ die Menge der zu M assoziierten Primideale.

Für $\text{Ass}_R(R)$ schreiben wir $\text{Ass}(R)$.

Wir nennen R lokal, resp. halbkokal, wenn R noether'sch ist und nur ein resp. nur endlich viele Maximalideale besitzt. Ist R halbkokal, so bezeichnen wir mit R^* die Kompletion von R bezüglich der $\text{Rad}(R)$ -adischen Topologie.

Ist k ein Körper, so bezeichnen wir seine Charakteristik mit $\chi(k)$.

Zunächst geben wir einige Ergebnisse über allgemeine kommutative Ringe an.

- (1.1)a) Ist α ein Ideal von R , $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n \in \text{Spec}(R)$ und $\alpha \subseteq \mathfrak{g}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{g}_n$, so gilt $\alpha \subseteq \mathfrak{g}_i$ mit einem geeigneten i .
- b) Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ Ideale von R und ist $\mathfrak{g} \in \text{Spec}(R)$, so folgt aus $\alpha_1 \cap \dots \cap \alpha_n \subseteq \mathfrak{g}$, dass, für ein geeignetes i , schon $\alpha_i \subseteq \mathfrak{g}$.

Die Beweise zu diesen Tatsachen findet man in jedem Lehrbuch der kommutativen Algebra. (s. etwa [4], I - 3,2)

- (1.2)a) Sei $R \subseteq R'$. Dann ist R' genau dann torsionsfrei über R , wenn $\text{NNT}(R') \cap R \subseteq \text{NNT}(R)$.
- b) Ist $R \subseteq R' \subseteq Q(R)$, so folgt $\text{NNT}(R) = \text{NNT}(R') \cap R$.
- c) Ist $S \subseteq \text{NNT}(R)$ multiplikativ abgeschlossen, $R' \subseteq R_S$ und α' ein Ideal von R' derart, dass $S \subseteq \text{NNT}_{R'}(R'/\alpha')$, so ist $R'/\alpha' \subseteq Q(R/\alpha' \cap R)$.

a) und b) ergeben sich sofort aus den Definitionen. c) ergibt sich leicht mit der folgenden Ueberlegung: Wegen $S \subseteq \text{NNT}_R(R'/\alpha')$ ist $\alpha' R_S \cap R' = \alpha' R'_S \cap R' = \alpha'$ (s. [4], I-16, Prop. 6), und daraus folgt $R'/\alpha' \subseteq R_S/\alpha' \cap R_S$. Es gilt aber auch $\alpha' R_S \cap R = \alpha' \cap R$, und somit folgt $R_S/\alpha' \cap R_S \subseteq Q(R/\alpha' \cap R)$.

(1.3) Sei R' eine ganze Erweiterung von R . Dann gilt:

- a) Ist $\mathfrak{g} \in \text{Spec}(R)$, so gibt es ein $\mathfrak{g}' \in \text{Spec}(R')$ mit $\mathfrak{g}' \cap R = \mathfrak{g}$.
- b) Sind $\mathfrak{g}', \alpha' \in \text{Spec}(R')$ mit $\mathfrak{g}' \subseteq \alpha'$, so folgt aus $\mathfrak{g}' \cap R = \alpha' \cap R$, dass $\mathfrak{g}' = \alpha'$.

c) $\dim(R) = \dim(R')$.

d) Ist $\mathfrak{A}'$ ein Ideal von R' , so gilt $\dim(R'/\mathfrak{A}') = \dim(R/\mathfrak{A}' \cap R)$.

e) Ist $\mathfrak{A}$ ein Ideal von R , so gilt $\dim(R'/\mathfrak{A}R') = \dim(R/\mathfrak{A})$.

f) $R \leq R'$.

a) und b) zusammen bilden das sog. Lying-over Theorem (s. etwa [2], (10.8)). c) ist eine Folgerung aus dem sog. Going-up Theorem (s. [2], (10.9), (10.10)). d) folgt sofort aus c), denn $R'/\mathfrak{A}'$ ist offenbar ganz über $R/\mathfrak{A}' \cap R$. Zum Beweis von e):

Sei $\mathfrak{g} \in \text{Spec}(R)$ mit $\dim(R/\mathfrak{g}) = \dim(R/\mathfrak{A})$. Dann gibt es nach a) ein $\mathfrak{g}' \in \text{Spec}(R')$ mit $\mathfrak{g}' \cap R = \mathfrak{g}$, und es ist $\mathfrak{A}R' \subseteq \mathfrak{g}R' \subseteq \mathfrak{g}'$. Nach d) folgt nun $\dim(R/\mathfrak{A}) = \dim(R/\mathfrak{g}) = \dim(R'/\mathfrak{g}') \leq \dim(R'/\mathfrak{A}R')$. Sei nun $\mathfrak{A}R' \subseteq \mathfrak{g}' \in \text{Spec}(R')$ mit $\dim(R'/\mathfrak{g}') = \dim(R'/\mathfrak{A}R')$. Dann ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}R' \cap R \subseteq \mathfrak{g}' \cap R$, und somit $\dim(R/\mathfrak{A}) \geq \dim(R/\mathfrak{g}' \cap R) = \dim(R'/\mathfrak{g}') = \dim(R'/\mathfrak{A}R')$.

f) folgt sofort aus a) und b).

Nun wenden wir uns einigen Ergebnissen zu, die nur für noether'sche Ringe gelten.

(1.4) Ist R noether'sch und M ein endlicher R -Modul, so gilt

$$\text{NT}_R(M) = \bigcup_{\mathfrak{g} \in \text{Ass}_R(M)} \mathfrak{g}.$$

Insbesondere bedeutet also die Torsionsfreiheit von M über R , dass es zu $\mathfrak{g} \in \text{Ass}_R(M)$ immer ein $\mathfrak{q} \in \text{Ass}(R)$ gibt mit $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{q}$.

Zum Beweis des ersten Teils der Behauptung sei auf [4], I-19, Cor.1 verwiesen. Der zweite Teil folgt aus dem ersten unmittelbar mit (1.1) a).

(1.5) Ist R noether'sch und M ein endlicher R -Modul, $\mathfrak{a} \in \text{NNT}_R(M)$, $\mathfrak{g}_0 \in \text{Ass}_R(M)$ und $\mathfrak{a}R + \mathfrak{g}_0 \neq R$, so gehört jedes minimale Primoberideal von $\mathfrak{a}R + \mathfrak{g}_0$ zu $\text{Ass}_R(M/\mathfrak{a}M)$.

Ein Beweis zu (1.5) findet sich in [1] (pg.99).

Aus (1.4) und (1.5) folgert man nun leicht:

(1.6) Ist R noether'sch und $a \in \text{Rad}(R) \cap \text{NNT}(R)$, so gilt
 $\text{NT}(R) \subseteq \text{NT}_R(R/aR)$.

In [2] ((12.6), pg.41) wird weiter bewiesen:

(1.7) Ist R noether'sch, $a, b \in \text{NNT}(R)$, $\mathfrak{g} \in \text{Ass}_R(R/aR)$ und $b \in \mathfrak{g}$,
 so folgt $\mathfrak{g} \in \text{Ass}_R(R/bR)$.

Aus (1.4) und (1.7) ergibt sich nun:

(1.8) Ist R noether'sch und sind $a, b \in \text{NNT}(R)$ Nichteinheiten
 in R , so gilt:
 $a \in \text{NNT}_R(R/bR) \iff b \in \text{NNT}_R(R/aR)$.

Da wir uns eingehend mit der Kompletion halblokalen Ringe
 beschäftigen, seien hier einige grundlegende Resultate über
 dieses Gebiet angegeben. (s. [2], Chap. II)

(1.9) Ist R halbkokal, so gilt:

- a) $R^* = \bigoplus (R_{\mathfrak{m}})^*$, wo $\mathfrak{m}$ die Maximalideale von R durchläuft.
- b) $\dim(R^*) = \dim(R)$.
- c) $\text{NNT}(R) \subseteq \text{NNT}(R^*)$
- d) $R \leq R^*$, $\text{Rad}(R) = \text{Rad}(R^*) \cap R$.
- e) $Q(R) \cap R^* = R$.

Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R , so gilt weiter:

f) $\mathfrak{a}R^* \cap R = \mathfrak{a}$.

g) $(R/\mathfrak{a})^* = R^*/\mathfrak{a}R^*$.

h) $\text{Ass}_{R^*}(R^*/\mathfrak{a}R^*) = \bigcup_{\mathfrak{g} \in \text{Ass}_R(R/\mathfrak{a})} \text{Ass}_{R^*}(R^*/\mathfrak{a}R^*)$.

(1.10) $\mathfrak{g}^* \in \text{Ass}_{R^*}(R^*/\mathfrak{a}R^*) \implies \mathfrak{g}^* \cap R \in \text{Ass}_R(R/\mathfrak{a})$.

Zwischen den Kompletionen eines halblokalen Ringes und seinen
 endlichen ganzen Erweiterungen besteht eine enge Beziehung.

(1.11) Ist R halblokal und R' eine endliche, ganze Erweiterung von R , so gilt:

a) $R'^* = R' \otimes_R R^*$.

b) $R^* \subseteq R'^*$, und R'^* ist endlich und ganz über R^* .

c) Ist $R' \subseteq \text{der}(R)$, so gilt $R'^* \subseteq \text{der}_{R^*}^{\text{NNT}(R)}(R^*) \subseteq \text{der}(R^*)$.

Beweis: Weil R' ganz ist über R , stimmen die $\text{Rad}(R')$ -adische und die $\text{Rad}(R)R'$ -adische Topologie von R' überein. Um R'^* zu erhalten, können wir also R' , aufgefasst als R -Modul, $\text{Rad}(R)$ -adisch kompletieren. Da R' ein endlicher R -Modul ist, folgt nun a) mit [2] (17.8).

b) ist eine einfache Konsequenz von a).

c) folgt aus a) mit (1.9)c).

Ganz besonders wichtig ist der nun folgende Satz, der es uns erlaubt, eine grosse Klasse von lokalen, kompletten Ringen als endliche, ganze Erweiterung eines regulären, lokalen, kompletten Ringes aufzufassen. Bei Nagata ([2], (31.6)) findet sich dieser Satz für den Spezialfall von lokalen, kompletten Integritätsbereichen, doch lässt sich die dort angegebene Beweismethode auf den folgenden, allgemeineren Fall übertragen.

(1.12) Ist R lokal, komplett, und $\mathfrak{m}$ das Maximalideal von R , und gilt weiter für $\chi(R/\mathfrak{m}) = p$: $p1_R = 0$, oder Parameter von R , so gibt es einen lokalen, regulären, kompletten Ring S , über dem R endlich und ganz ist.

Beweis: Nach dem Cohen'schen Struktursatz über lokale, komplette Ringe gibt es einen lokalen, kompletten Ring $J \subseteq R$ mit dem Maximalideal pJ , für den weiter gilt $R = J[\![x_1, \dots, x_n]\!]$, wo $\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^n m_i R$. Wegen der Wahl von p finden wir ein vollständiges Parametersystem $(x_1, \dots, x_d)$ von R derart, dass $x_1 = p1_R$, falls $p1_R \neq 0$. Wir setzen $S = J[\![x_1, \dots, x_d]\!]$. Dann ist S lokal und hat das Maximalideal $\mathfrak{n} = \sum_{i=1}^d x_i S$. Da $(x_1, \dots, x_d)$ ein vollständiges Parametersystem von R ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $m_1^{h_1} \dots m_n^{h_n} \in \sum_{i=1}^d x_i R = \mathfrak{n}R$, sobald $\sum_{i=1}^n h_i > N$; wir sehen also,

$R = J[m_1, \dots, m_n] = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ h_i \in \mathbb{N}}} m_1^{h_1} \dots m_n^{h_n} S + \mathfrak{m}R$. Weil S lokal und komplett ist folgt daraus nach [2] (30.6), dass R ein endlicher S -Modul ist. Deshalb ist auch $\dim(S) = \dim(R) = d$, und wegen $\sum_{i=1}^d x_i S = \mathfrak{m} \subseteq_{\max} S$ ist S regulär.

Eine R -Algebra $\hat{R}$ nennen wir R -flach, wenn jede exakte Sequenz von R -Moduln bei Tensorierung mit $\hat{\otimes}_R \hat{R}$ exakt bleibt. $\hat{R}$ heisst R -treuflach, wenn die tensorierte Sequenz genau dann exakt ist, wenn die ursprüngliche es war. Gleichbedeutend damit ist, wenn $\hat{R}$ R -flach ist, und wenn für jedes echte Ideal α von R $\alpha \hat{R} \neq \hat{R}$. (s. [1], pg. 26)

Wir stellen folgende Ergebnisse zusammen, für deren Beweise etwa auf [1] Chap. 2 und Chap. 8 verwiesen sei.

(1.13) Ist $\hat{R}$ eine R -flache Algebra, so gilt:

- a) $\hat{R}$ ist über R torsionsfrei.
- b) Ist R' eine R -Algebra, so ist $\tilde{R}' = \hat{R} \otimes_R R'$ in natürlicher Weise eine flache R' -Algebra.
- c) Ist $R \subseteq R'$, so ist $\hat{R} \subseteq \tilde{R}'$; ist R' endlich und ganz über R , so ist es $\tilde{R}'$ auch über $\hat{R}$.
- d) Ist α ein Ideal von R , so ist $\hat{R}/\alpha \hat{R} \cong R/\alpha$ -flach.

Für unsere Anwendungen ist von besonderem Interesse:

(1.14) Ist $S \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen, so ist R_S R -flach.
Ist R halbkokal, so ist R^* R -treuflach.

Wir wollen hier noch bemerken, dass (1.9)c), h) und (1.10) auch gelten, wenn R^* durch eine beliebige flache R -Algebra ersetzt wird.

2. Subdimensionen, Dimensionsdefekte

Definition: Sei R ein noether'scher Ring, M ein endlicher R -Modul.

Dann nennen wir $\delta_R(M) = \min\{\dim(R/\mathfrak{g}) \mid \mathfrak{g} \in \text{Ass}_R(M)\}$ die Subdimension von M über R . $\Delta_R(M) = \dim_R(M) - \delta_R(M)$ nennen wir den Dimensionsdefekt von M über R .

$\delta_R(R) = \delta(R)$ nennen wir Subdimension von R , $\Delta_R(R) = \Delta(R)$ den Dimensionsdefekt von R .

Ist R halbkokal, so nennen wir $\delta^*(R) = \delta(R^*)$ die analytische Subdimension von R und $\Delta^*(R) = \Delta(R^*)$ den analytischen Dimensionsdefekt von R .

(2.1) Ist R noether'sch, so gilt:

- a) $0 \leq \delta_R(M) \leq \dim_R(M)$, wo M ein endlicher R -Modul ist.
- b) $\delta_R(M) > 0 \iff$ kein $\mathfrak{g} \in \text{Ass}_R(M)$ ist Maximalideal von R .
Ist R halbkokal, so ist $\delta_R(M) > 0$ sogar mit $\text{NNT}_R(M) \cap \text{Rad}(R) \neq \emptyset$ äquivalent.
- c) $a \in \text{NNT}(R) \cap \text{Rad}(R) \implies \delta(R/aR) < \delta(R)$.
- d) Sind M und N endliche R -Moduln derart, dass $\text{NNT}_R(N) \subseteq \text{NNT}_R(M)$, so ist $\delta_R(N) \leq \delta_R(M)$.
- e) Ist M ein endlicher R -Modul und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R mit $\dim(R/\mathfrak{a}) < \delta_R(M)$, so ist $\mathfrak{a} \cap \text{NNT}_R(M) \neq \emptyset$.

Beweis: a) folgt sofort aus den Definitionen.

b) ist eine unmittelbare Konsequenz von (1.1) und (1.4).

c) Sei $\mathfrak{g}_0 \in \text{Ass}(R)$. Dann liegen, wegen $a \in \text{Rad}(R)$, aR und $\mathfrak{g}_0$ in einem gemeinsamen Maximalideal von R . Wegen $a \in \text{NNT}(R)$ folgt daraus mit (1.5), dass jeder minimale Primdivisor $\mathfrak{g}$ von $aR + \mathfrak{g}_0$ zu $\text{Ass}_R(R/aR)$ gehört. Wegen $a \in \text{NNT}(R)$ ist nach (1.4) andererseits auch $a \notin \mathfrak{g}_0$, und daraus folgt sofort die Behauptung, denn es ist $\delta(R/aR) = \delta_R(R/aR) \leq \dim(R/\mathfrak{g}) < \dim(R/\mathfrak{g}_0)$.

d) Sei $\mathfrak{g} \in \text{Ass}_R(M)$ mit $\dim(R/\mathfrak{g}) = \delta_R(M)$. Dann ist $\mathfrak{g} \in \text{NNT}_R(M) \subseteq \text{NNT}_R(N)$ (s. (1.4)), und nach (1.4) und (1.1)a) gibt es ein $\mathfrak{a} \in \text{Ass}_R(N)$ mit $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{a}$. Somit ist $\delta_R(M) = \dim(R/\mathfrak{g}) \leq \dim(R/\mathfrak{a}) \leq \delta_R(N)$.

e) α liegt in keinem $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_R(M)$ und somit nach (1.1)a) auch nicht in $\bigcup \{\mathfrak{q} \in \text{Ass}_R(M)\}$. Nach (1.4) folgt daraus aber, dass $\alpha \notin \text{NT}_R(M)$.

Das Verhalten von $\delta(R)$ und $\Delta(R)$ bei endlichen, ganzen Erweiterungen wird beschrieben durch:

(2.2) Sei R noether'sch und R' eine endliche, ganze Erweiterung von R . Dann gilt:

a) $\delta(R) \geq \delta(R')$, $\Delta(R) \leq \Delta(R')$.

b) Ist R torsionfrei über R , so gilt sogar:

$$\delta(R) = \delta(R'), \quad \Delta(R) = \Delta(R').$$

c) $R' \subseteq \text{der}(R) \implies \delta(R) = \delta(R'), \quad \Delta(R) = \Delta(R')$.

Beweis: a) folgt aus $\text{Ass}(R) \subseteq \{\mathfrak{q}' \cap R \mid \mathfrak{q}' \in \text{Ass}(R')\}$ sofort mit (1.3)d).

b) Sei $\mathfrak{q}' \in \text{Ass}(R')$ derart, dass $\dim(R'/\mathfrak{q}') = \delta(R')$. Nach (1.4) ist $\mathfrak{q}' \subseteq \text{NT}(R')$. Also gilt $\mathfrak{q}' \cap R \subseteq \text{NT}_R(R')$, und daraus ergibt sich mit der Torsionsfreiheit von R' über R , dass $\mathfrak{q}' \cap R \subseteq \text{NT}(R)$. Wiederum nach (1.4) folgt nun, dass $\mathfrak{q}' \cap R \subseteq \bigcup \{\mathfrak{q} \in \text{Ass}(R)\}$, und nach (1.1)a) finden wir ein $\mathfrak{q} \in \text{Ass}(R)$ mit $\mathfrak{q}' \cap R \subseteq \mathfrak{q}$. Nach (1.3)d) folgt daraus: $\delta(R) \leq \dim(R/\mathfrak{q}) \leq \dim(R/\mathfrak{q}' \cap R) = \dim(R'/\mathfrak{q}') = \delta(R')$ und somit das Gewünschte.

c) folgt aus b) mit der Torsionsfreiheit von $Q(R)$ über R .

Wenden wir uns nun den analytischen Größen $\delta^*(R)$ und $\Delta^*(R)$ zu!

(2.3) Sei R halblokal. Dann gilt:

a) R ungemischt $\iff \Delta^*(R) = 0 \iff \delta^*(R) = \dim(R)$.

b) $\delta^*(R) > 0 \iff \delta(R) > 0$.

c) $a \in \text{NNT}(R) \cap \text{Rad}(R) \implies \delta^*(R/aR) < \delta^*(R)$.

Beweis: a) folgt sofort aus den Definitionen.

b) Nach (2.1)b) ist $\delta(R) > 0$ gleichbedeutend mit

$\text{Rad}(R) \cap \text{NNT}(R) \neq \emptyset$, und $\delta^*(R) > 0$ mit $\text{Rad}(R^*) \cap \text{NNT}(R^*) \neq \emptyset$.
Nach (1.9) c) und e) gilt aber $\text{Rad}(R) = \text{Rad}(R^*) \cap R$, $\text{NNT}(R) = \text{NNT}(R^*) \cap R$, und daraus folgt nun das Gewünschte.

c) folgt mit (2.1)c) sofort aus $\text{Rad}(R) \subseteq \text{Rad}(R^*)$ und $\text{NNT}(R) \subseteq \text{NNT}(R^*)$.

Das Verhalten von δ^* und Δ^* bei endlichen, ganzen Erweiterungen wird beschrieben durch:

(2.4) Ist R halblokal und R' endlich und ganz über R , so gilt:

- a) $\delta^*(R) \geq \delta^*(R')$ und $\Delta^*(R) \leq \Delta^*(R')$.
- b) Ist $R' \subseteq R$, so gilt sogar:
 $\delta^*(R) = \delta^*(R')$, $\Delta^*(R) = \Delta^*(R')$.

Beweis: a) folgt mit (2.2)a) daraus, dass R'^* endlich und ganz ist über R^* . (s. (1.11) b))

b) folgt sofort aus (2.2) c) und (1.11) c).

(2.5) Ist R noether'sch und R' eine endliche, ganze Erweiterung von R , so gilt $\delta_R(R') = \delta(R')$.

Beweis: Offenbar ist $\text{NNT}(R') \cap R = \text{NNT}_R(R')$.

Sei nun $\mathfrak{Q}' \in \text{Ass}(R')$. Dann ist $\mathfrak{Q}' \subseteq \text{NT}(R')$ ((1.4)), und somit $\mathfrak{Q}' \cap R \subseteq \text{NT}_R(R')$, und nach (1.4) und (1.1)a) gibt es ein $\mathfrak{Q} \in \text{Ass}_R(R')$ mit $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{Q}' \cap R$. Nun folgt $\dim(R'/\mathfrak{Q}') = \dim(R/\mathfrak{Q}' \cap R) \geq \dim(R/\mathfrak{Q})$, und wählen wir $\mathfrak{Q}'$ so, dass $\delta(R') = \dim(R'/\mathfrak{Q}')$, so folgt $\delta(R') \geq \delta_R(R')$. Ist umgekehrt $\mathfrak{Q} \in \text{Ass}_R(R')$, so finden wir nach (1.4) und (1.1)a) ein $\mathfrak{Q}' \in \text{Ass}(R')$ derart, dass $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{Q}' \cap R$ (s. (1.1)a)). Wählen wir wieder $\mathfrak{Q}$ so, dass $\delta_R(R') = \dim(R/\mathfrak{Q})$, so folgt $\delta_R(R') = \dim(R/\mathfrak{Q}) \geq \dim(R/\mathfrak{Q}' \cap R) = \dim(R'/\mathfrak{Q}')$, und wir sehen, dass $\delta_R(R') \geq \delta(R')$.

(2.6) Ist R halblokal, so gilt:

- a) $\delta^*(R) = \min\{\delta^*(R_{\mathfrak{m}}) \mid \mathfrak{m} \in \max. R\}$.
- b) $\Delta^*(R_{\mathfrak{m}}) \leq \Delta^*(R)$, für jedes Maximalideal $\mathfrak{m}$ von R .

Beweis: a) Seien $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ die Maximalideale von R . Dann gilt nach (1.9)a) $R^* = \bigoplus_{h=1}^n (R_{\mathfrak{m}_h})^*$, und somit ist $\text{Ass}(R^*) = \{ (R_{\mathfrak{m}_1})^* \oplus \dots \oplus (R_{\mathfrak{m}_{h-1}})^* \oplus \mathfrak{p}_h^* \oplus (R_{\mathfrak{m}_{h+1}})^* \oplus \dots \oplus (R_{\mathfrak{m}_n})^* \mid \mathfrak{p}_h^* \in \text{Ass}((R_{\mathfrak{m}_h})^*) \}$. Daraus folgt sofort die Behauptung.
 b) $\Delta^*(R_{\mathfrak{m}}) = \dim(R_{\mathfrak{m}}) - \delta^*(R_{\mathfrak{m}}) \leq \dim(R) - \delta^*(R) = \Delta^*(R)$.

Nach diesen elementaren Eigenschaften von $\delta^*(R)$ und $\Delta^*(R)$ wollen wir nun einige tieferliegende Resultate über diese Grössen herleiten. Um diese zu erhalten, müssen wir allerdings ein Werkzeug bereitstellen, nämlich die in der Einleitung erwähnte Divisionsendlichkeit. Dies soll nun im folgenden Abschnitt geschehen.

3. Divisionsendlichkeit

Ausgangspunkt zu der hier entwickelten Methode war die in der Einleitung erwähnte Frage, ob ein lokaler, ungemischter Integritätsbereich eine endliche, ganze, Nullteilerfreie Erweiterung besitzt, in der es ein Hauptideal ohne eingebettete Komponenten gibt. Tatsächlich lässt sich diese Frage positiv beantworten. Ja es gilt sogar wesentlich mehr, wie wir in (5.3) zeigen werden. Ist nämlich R ein lokaler, ungemischter Integritätsbereich, so gibt es in der (R) eine endliche ganze Erweiterung R' , in welcher kein einziges Hauptideal eingebettete Komponenten besitzt. Wesentliches Hilfsmittel zu diesem Satz ist die Tatsache, dass jeder lokale Integritätsbereich R die folgende Eigenschaft hat: Es gibt eine endliche, ganze Erweiterung von R^* , in der alle Primideale, welche zu einem durch einen Nicht-nullteiler erzeugten Ideal gehören, eine Dimension $\geq \delta^*(R) - 1$ haben.

Nennen wir nun einen Ring R' subdimensionstreu, falls alle seine Primideale, die zu einem durch einen Nichtnullteiler erzeugten Ideal gehören, eine Dimension $\geq \delta(R) - 1$ haben, so gilt also: Die Kompletion eines lokalen Integritätsbereiches besitzt in ihrem totalen Quotientenring eine endliche, ganze und subdimensionstreue Erweiterung. Nennen wir nun die Menge aller endlichen, ganzen, subdimensionstreuen Erweiterungen $R' \subseteq \text{der}(R)$ eines noether'schen Ringes $R \in \mathcal{M}$, so rückt die Frage, ob $\mathcal{M} \neq \emptyset$, in den Vordergrund. Diese Frage ist, wie wir in diesem Abschnitt sehen werden, mit der Divisionsendlichkeit von R gleichbedeutend. Insbesondere werden wir auch sehen, dass $\mathcal{M}$ im Falle der Divisionsendlichkeit von R bezüglich $\subseteq$ ein einziges minimales Element hat, und dieses konstruieren.

Definition: Ist $n \in \mathbb{N}$, so bezeichnen wir mit $I^{(n)}(R)$ die Menge der Ideale α von R mit $\dim(R/\alpha) < n$.

Ist M ein R -Modul, so setzen wir:

$$D_R^{(n)}(M) = \bigcup_{\alpha \in I^{(n)}(R)} (M : \alpha)_{Q_R(M)}.$$

Für $D_R^{(n)}(R)$ schreiben wir kurz $D^{(n)}(R)$.

(3.1) Ist n eine nichtnegative, ganze Zahl, so gilt:

$$\alpha, b \in I^{(n)}(R) \implies \alpha b \in I^{(n)}(R).$$

Beweis: Ist $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(R)$ mit $\alpha b \notin \mathfrak{q}$, so, dass $\dim(R/\mathfrak{q}) = \dim(R/\alpha b)$, so folgt, weil $\mathfrak{q}$ prim ist, $\alpha \notin \mathfrak{q}$ oder $b \notin \mathfrak{q}$, also auf jeden Fall $\dim(R/\mathfrak{q}) < n$.

(3.2) Ist $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

a) Ist M ein R -Modul, und $S \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen,

so ist $M' = \bigcup_{\alpha \in I^{(n)}(R)} (M : \alpha)_{M_S}$ ein R -Modul.

b) $R' = \bigcup_{\alpha \in I^{(n)}(R)} (R : \alpha)_{R_S}$ ist ein Ring.

c) Insbesondere ist also $D_R^{(n)}(M)$ ein R -Modul und $D^{(n)}(R)$ ein Ring.

Beweis: a) Sei $r \in R$, $x, y \in M'$ und $a, b \in I^{(n)}(R)$ derart, dass $xa, yb \subseteq M$. Dann ist offenbar $rx \subseteq M$, also $rx \subseteq M'$.

Andrerseits ist aber auch $(x + y)ab \subseteq M$ und nach (3.1) folgt $x + y \in M'$.

b) Seien $x, y \in R'$, $a, b \in I^{(n)}(R)$ derart, dass $xa, yb \subseteq R$. Dann folgt $xyab \subseteq R$, und nach (3.1) folgt $xy \in R'$. Mit a) folgt nun die Behauptung.

c) Unmittelbar aus a) und b).

Im folgenden seien nun einige einfache Eigenschaften von $D_R^{(n)}(M)$ hergeleitet.

(3.3)a) Ist $n \in \mathbb{N}$, so gilt $M \subseteq D_R^{(n)}(M)$

b) Sind n und $m \in \mathbb{N}$, so gilt $D_R^{(n)}(M) \subseteq D_R^{(m)}(M)$, falls $n \leq m$.

c) Ist R noether'sch und $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$D_R^{(n)}(M) = D_R^{(n)}(D_R^{(n)}(M)).$$

d) Ist R noether'sch, M ein endlicher R -Modul und $0 < \delta_R(M) \leq n \in \mathbb{N}$, so ist $M \neq D_R^{(n)}(M)$.

e) Ist R noether'sch und M ein endlicher R -Modul, so folgt $n < \delta_R(M)$, falls $D_R^{(n)}(M)$ ein endlicher R -Modul ist. Insbesondere folgt aus $M = D_R^{(n)}(M) = M$, dass $n < \delta_R(M)$.

Beweis: a) ergibt sich sofort aus den Definitionen.

b) folgt sofort aus $I^{(m)}(R) \subseteq I^{(n)}(R)$.

c) Sei $x \in D_R^{(n)}(D_R^{(n)}(M))$, $a \in I^{(n)}(R)$ derart, dass $xa \subseteq D_R^{(n)}(M)$. Da R noether'sch ist gibt es Elemente $a_1, \dots, a_h \in a$ derart, dass $a = \sum_{i=1}^h a_i R$. Wegen $xa \subseteq D_R^{(n)}(M)$ folgt daraus, dass $xa_i \in D_R^{(n)}(M)$ für $i = 1, \dots, h$, und wir finden Ideale $\alpha_1, \dots, \alpha_h \in I^{(n)}(R)$ so, dass $xa_i \alpha_i \subseteq M$ für $i = 1, \dots, h$. Daraus folgt $xa \prod_{j=1}^h \alpha_j \subseteq M$, und wegen $a \prod_{j=1}^h \alpha_j \in I^{(n)}(R)$ erhalten wir $x \in D_R^{(n)}(M)$.

d) Wir werden zum Beweis ein $a \in \text{NT}_R(M)$ derart bestimmen, dass in $\text{Ass}_R(M/aM)$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\dim(R/\mathfrak{p}) < n$ liegt. Dann ist $(aM : \mathfrak{p}) \subseteq aM$, und wir finden ein $m \in M - aM$ derart, dass $\mathfrak{p}m \subseteq aM$. Es ist $\frac{m}{a} \in Q(M)$, und wir sehen leicht, dass $\frac{m}{a} \in D_R^{(n)}(M)$, denn aus $\mathfrak{p}m \subseteq aM$ und $\mathfrak{p} \in I^{(n)}(R)$ folgt $\frac{m}{a} \in (M : \mathfrak{p})_{Q(M)} \subseteq D_R^{(n)}(M)$. Wegen $m \notin aM$ ist andererseits $\frac{m}{a} \notin M$, und wir sind, bis auf das Aufsuchen von a , fertig.

Wir bestimmen nun das Element a:

Ist $\mathfrak{q}_0 \in \text{Ass}_R(M)$ derart, dass $\dim(R/\mathfrak{q}_0) = \delta_R(M)$, so wählen wir ein Maximalideal $\mathfrak{m}$ von R mit $\mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{m}$. Wegen $\delta_R(M) > 0$ ist nach (1.1)a) $\bigcup \{\text{Ass}_R(M)\} \not\subseteq \mathfrak{m}$, und nach (1.4) folgt $\text{NNT}_R(M) \cap \mathfrak{m} \neq \emptyset$. Sei also $a \in \text{NNT}_R(M) \cap \mathfrak{m}$. Dann ist $aR + \mathfrak{q}_0 \neq R$, und nach (1.5) gehört jeder minimale Primdivisor $\mathfrak{q}$ von $aR + \mathfrak{q}_0$ zu $\text{Ass}_R(M/aM)$. Wegen $\mathfrak{q} \ni a \notin \text{NT}_R(M) \supseteq \mathfrak{q}_0$ (s. (1.4)) ist $\mathfrak{q}_0 \in \mathfrak{q}$, und somit gilt $\dim(R/\mathfrak{q}) < \dim(R/\mathfrak{q}_0) = \delta_R(M) \leq n$.

e) Wäre $\delta_R(M) \leq n$, so wäre erst recht $\delta_R(D_R^{(n)}(M)) \leq n$ (s. (2.1)d)). Nach d) hätten wir somit $D_R^{(n)}(M) \neq D_R^{(n)}(D_R^{(n)}(M))$, also einen Widerspruch zu c).

Wir wollen das Verhalten von $D_R^{(n)}(M)$ bei einem Wechsel des Ringes R studieren. Dazu stellen wir zunächst bereit:

(3.4) Ist $R \subseteq R' \subseteq \text{der}(R)$ und M' ein torsionsfreier R' -Modul, so gilt $Q_{R'}(M') = Q_R(M')$.

Beweis: trivial.

Nun können wir zeigen:

(3.5) a) Ist $n \in \mathbb{N}$ und M ein R -Modul, so ist $D_R^{(n)}(M)$ kanonisch isomorph zu $D_{R/\text{ann}_R(M)}^{(n)}(M)$.

b) Ist $n \in \mathbb{N}$, $R \subseteq R' \subseteq \text{der}(R)$ und M' ein torsionsfreier R' -Modul, so gilt $D_{R'}^{(n)}(M') = D_R^{(n)}(M')$.

Beweis: a) $Q_R(M)$ ist kanonisch isomorph zu $Q_{R/\text{ann}_R(M)}(M)$. Die

Einschränkung dieses Isomorphismus auf $D_R^{(n)}(M)$ liefert die gewünschte Isomorphie. Sei nämlich $x = \frac{m}{s} \in D_R^{(n)}(M)$ ($m \in M$, $s \in \text{NNT}_R(M)$) und $\alpha \in I^{(n)}(R)$ und $x\alpha \subseteq M$. Bezeichnen wir die Restklassenbildung modulo $\text{ann}_R(M)$ mit $\overline{}$, so gilt für das kanonische Bild $\overline{x}$ von x $\overline{x}\overline{\alpha} \subseteq M$, und wegen $\dim(R/\overline{\alpha}) = \dim(R/\alpha + \text{ann}_R(M)) \leq \dim(R/\alpha)$ folgt $\overline{x} \in D_R^{(n)}(M)$. Ist nun umgekehrt $\overline{x} = \frac{m}{s} \in D_R^{(n)}(M)$, so gibt es ein Ideal α von R mit $\text{ann}_R(M) \subseteq \alpha$ und $\overline{x}\overline{\alpha} \subseteq M$, und es wird $\frac{m}{s}\alpha \subseteq M$.

Andrerseits ist $\dim(R/\alpha) = \dim(R/\overline{\alpha})$, und wir sehen, dass $\frac{m}{s} \in D_R^{(n)}(M)$.

b) " $\supseteq$ " folgt sofort aus $Q_{R'}(M') = Q_R(M')$ (s. (3.4))

und aus $\{\alpha R' \mid \alpha \in I^{(n)}(R)\} \subseteq I^{(n)}(R')$, wobei die letzte Beziehung aus der Ganzheit von R' über R mit (1.3) e) folgt.

" $\subseteq$ ": Wegen $Q_{R'}(M') = Q_R(M')$ (s. (3.4)) erhalten wir

$$D_{R'}^{(n)}(M') \subseteq \bigcup_{\alpha' \in I^{(n)}(R')} (M' : \alpha' \cap R)_{Q_{R'}(M')} \subseteq D_R^{(n)}(M'), \text{ denn}$$

wegen der Ganzheit von R' über R ist $\{\alpha' \cap R \mid \alpha' \in I^{(n)}(R')\} \subseteq I^{(n)}(R)$ (s. (1.3) d)).

(3.6) Sei R noether'sch und M ein endlicher R -Modul und sei $n \in \mathbb{N}$,

$n < \delta_R(M)$. Dann gilt:

a) Ist $D_R^{(n)}(M)$ ein endlicher R -Modul, so ist $\text{ann}_R(D_R^{(n)}(M)/M) \in$

$$I^{(n)}(R) \cup \{R\}.$$

b) $M = D_R^{(n)}(M) \iff \forall a \in \text{NNT}_R(M)$ gilt $\delta_R(M/aM) \geq n$.

Beweis: a) Sei $D_R^{(n)}(M) = \sum_{i=1}^h x_i R$, $\alpha_i \in I^{(n)}(R)$ derart, dass

$x_i \alpha_i \subseteq M$ für $i=1, \dots, h$. Dann folgt $x_i \prod_{j=1}^h \alpha_j \subseteq M$, und es ist

$\prod_{j=1}^h \alpha_j \subseteq \text{ann}_R(D_R^{(n)}(M)/M)$. Daraus folgt mit (3.1) die Behauptung.

b) " $\implies$ ": Sei $a \in \text{NNT}_R(M)$, $\mathfrak{g} \in \text{Ass}_R(M/aM)$. Dann gilt $(aM : \mathfrak{g})_M \supset aM$, und wir finden $m \in M - aM$ derart, dass $m\mathfrak{g} \subseteq aM$. Also ist $\frac{m}{a} \in (M : \mathfrak{g})_{Q_R(M)} - M$, und wegen $D_R^{(n)}(M) = M$ ist

$$\frac{m}{a} \notin I^{(n)}(R).$$

" $\impliedby$ ": Sei $\frac{m}{a} \in D_R^{(n)}(M)$ ($m \in M$, $a \in \text{NNT}_R(M)$) und sei

$\alpha \in I^{(n)}(R)$ derart, dass $\frac{m}{a}\alpha \subseteq M$. Dann ist $m\alpha \subseteq aM$, und wegen $\dim(R/\alpha) < n$ ist nach (1.1) a) und (1.4) $\alpha \notin \text{NT}_R(M/aM)$. Daraus folgt aber $m \in aM$, also $\frac{m}{a} \in M$.

Wir wollen nun $D^{(n)}(R)$ im noether'schen Fall charakterisieren.

Dazu ist es nötig, die Eingangs definierte Menge $\mathcal{N}$ im folgenden Sinn zu verallgemeinern:

Definition: Sei $\mathcal{M}^{(n)}(R)$ die Menge aller endlichen, ganzen Erweiterungen $R' \subseteq \text{der}(R)$ von R mit der Eigenschaft:
 $\delta(R'/a'R') \geq n$ für alle $a' \in \text{NNT}(R')$.

(3.7) Sei R noether'sch und $n < \delta(R)$ und sei weiter $R' = D^{(n)}(R)$.
 Ist R' ein endlicher R -Modul, so gilt $R' \in \mathcal{M}^{(n)}(R)$.
 Ist $\mathcal{M}^{(n)}(R) \neq \emptyset$, so ist $R' \in \mathcal{M}^{(n)}(R)$, und für jeden Ring
 $R'' \in \mathcal{M}^{(n)}(R)$ ist $R' \subseteq R''$.

Beweis: Sei R' ein endlicher R -Modul. Nach (3.3) c) ist nun

$R' = D_R^{(n)}(R) = D_R^{(n)}(D_R^{(n)}(R)) = D_R^{(n)}(R')$. Nach (3.5)b) ist andererseits auch $D_{R'}^{(n)}(R') = D_R^{(n)}(R')$, und es wird schliesslich $R' = D^{(n)}(R')$. Nach (3.6) b) folgt nun, dass $R' \in \mathcal{M}^{(n)}(R)$.

Sei nun $R'' \in \mathcal{M}^{(n)}(R)$. Nach (3.6) b) folgt daraus, dass $R'' = D^{(n)}(R'')$. Da aber $Q(R'') = Q_{R''}(R'') = Q_R(R'') = Q(R)$ (s. (3.4)) und $R \subseteq R''$, sieht man leicht, dass $D_R^{(n)}(R) \subseteq D_R^{(n)}(R'')$, und nach (3.5) b) ist $R' \subseteq D_{R''}^{(n)}(R'') = R''$.

Ist R noether'sch und M ein endlicher R -Modul, so ist es von besonderem Interesse zu wissen, ob $D_R^{(n)}(M)$ für möglichst viele $n \in \mathbb{N}$ ein endlicher R -Modul ist. Nach (3.3) e) ist $D_R^{(n)}(M)$ höchstens dann endlich, wenn $n < \delta_R(M)$. Der fragliche Modul ist also nach (3.3) b) genau dann für möglichst viele $n \in \mathbb{N}$ endlich, wenn $D_R^{(\delta_R(M) - 1)}(M)$ ein endlicher R -Modul ist. (Dabei muss $\delta_R(M) > 1$ sein.) Aus diesem Grunde definieren wir:

Definition: Ist R noether'sch und M ein endlicher R -Modul, so nennen wir M divisionsendlich über R , falls $\delta_R(M) \leq 1$, oder falls $\delta_R(M) > 1$ und $D_R^{(\delta_R(M) - 1)}(M)$ ein endlicher R -Modul ist. Ist R divisionsendlich über sich selbst, so nennen wir R kurz divisionsendlich.

Aus (3.7) folgt nun leicht:

(3.8) Ein noether'scher Ring R ist genau dann divisionsendlich, wenn $\delta(R) \leq 1$, oder wenn $\delta(R) > 1$ und wenn es eine endliche, ganze Erweiterung $R' \subseteq \text{der}(R)$ von R derart gibt, dass $\delta(R'/a'R') \geq \delta(R) - 1$ für alle $a' \in \text{NNT}(R')$.

Schliesslich wollen wir über das Verhalten der Divisionsendlichkeit bei ganzen Erweiterungen und bei Kompletionen das folgende beweisen:

- (3.9) a) Ist R noether'sch und $R' \subseteq \text{der}(R)$ eine endliche, ganze Erweiterung von R , so ist R genau dann divisionsendlich, wenn R' es ist.
- b) Ist R halblokal und R^* divisionsendlich, so ist $\delta(R) = 0$ oder, falls $\delta(R) > 0$ ist, gibt es eine endliche, ganze Erweiterung $R' \subseteq \text{der}(R)$ von R derart, dass $\delta(R'/a'R') \geq \delta^*(R) - 1$ für alle $a' \in \text{NNT}(R')$.

Beweis: a) Sei R divisionsendlich. Ist $\delta(R) \leq 1$, so ist nach (2.2)c) auch $\delta(R') \leq 1$. Sei also $\delta(R) > 1$. Dann ist $D^{(\delta(R)-1)}(R) = R^n$ ein endlicher R -Modul. Andererseits finden wir ein $c \in \text{NNT}(R)$ mit $cR' \subseteq R$. Weil R' ganz ist über R , ist nach (1.3) d) weiter $\{a' \in R' \mid a' \in I^{(\delta(R)-1)}(R')\} \subseteq I^{(\delta(R)-1)}(R)$ und es wird $cD^{(\delta(R)-1)}(R') \subseteq \bigcup_{a' \in I^{(\delta(R)-1)}(R')} c(R' : a')_{Q(R)} \subseteq R^n$.

Daraus folgt die Divisionsendlichkeit von R' mit (2.2) c).

Die Divisionsendlichkeit von R folgt aus derjenigen von R' sofort mit (3.8).

b) Ist $\delta^*(R) = 0$, so ist nach (2.3) b) $\delta(R) = 0$.
Ist $\delta^*(R) = 1$, so ist die Behauptung mit $R = R'$ offenbar richtig.
Sei also $\delta^*(R) > 1$. Dann ist nach (1.9) b) und g) offenbar $\{aR^* \mid a \in I^{(\delta^*(R)-1)}(R)\} \subseteq I^{(\delta^*(R)-1)}(R^*)$. Nun folgt mit $R' = D^{(\delta^*(R)-1)}(R) : R^* R' \subseteq \sum_{a \in I^{(\delta^*(R)-1)}(R)} R^* (R : a)_{Q(R)} \subseteq \bigcup_{a \in I^{(\delta^*(R)-1)}(R)} (R^* : aR^*)_{Q(R^*)} \subseteq D^{(\delta^*(R)-1)}(R^*)$. Somit ist

$R'R^*$ ein von endlich vielen Elementen aus $Q(R)$ erzeugter R^* -Modul. Wir finden also ein $c \in \text{NNT}(R)$ derart, dass $cR' \subseteq R^* \cap Q(R) = R$ (s. (1.9) e) und die Behauptung folgt mit (3.7).

4. Lokale komplette Ringe

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass es zu jedem lokalen, kompletten Ring R eine "grosse" Klasse von divisionsendlichen R -Moduln gibt. Insbesondere werden wir eine Klasse von lokalen kompletten Ringen auszeichnen, die über sich selber divisionsendlich sind. Zu dieser Klasse gehören insbesondere die Kompletionen lokaler Integritätsbereiche.

Zunächst aber wollen wir einige hinreichende Kriterien dafür angeben, dass ein Modul M über einem Ring divisionsendlich ist. Insbesondere werden wir sehen, dass es im Fall, wo R noether'sch ist, genügt, die Divisionsendlichkeit geeigneter Restklassenringe R/α zu untersuchen.

(4.1) Sei R ein noether'scher Ring und M ein endlicher R -Modul.

Sei N ein Untermodul von M derart, dass $NNT_R(M) \subseteq NNT_R(M/N)$.

Sind dann M und M/N über R divisionsendlich, so ist es auch M .

Beweis: O.B.d.A. können wir annehmen $\delta_R(M) > 1$. Wegen $NNT_R(M) \subseteq NNT_R(N)$ ($N \subseteq M$) und $NNT_R(M) \subseteq NNT_R(M/N)$ folgt nach (2.1) d) dass $\delta_R(M/N), \delta_R(N) \geq \delta_R(M)$.

Insbesondere ist nun $\delta_R(N) > 1$, und die Divisionsendlichkeit von N über R besagt, dass $D_R^{(\delta_R(N)-1)}(N)$, also auch $D_R^{(\delta_R(M)-1)}(N)$ ein endlicher R -Modul ist. Es gibt also ein $s \in NNT_R(M)$ derart, dass $s(N : \alpha)_{NNT_R(M)} \subseteq N$ für alle Ideale

α von R mit $\dim(R/\alpha) < \delta_R(M)-1$.

Nun ist aber auch $\delta_R(M/N) > 1$, und weil M/N über R divisionsendlich ist, folgt, dass $D_R^{(\delta_R(M/N)-1)}(M/N)$, also auch $D_R^{(\delta_R(M)-1)}(M/N) \cap (M/N)_{NNT_R(M)}$ ein endlicher R -Modul ist.

Wir finden also ein $t \in NNT_R(M)$ derart, dass $t(M/N : \alpha)_{(M/N)_{NNT_R(M)}} \subseteq$

M/N , für alle Ideale α von R mit $\dim(R/\alpha) < \delta_R(M)-1$.

Daraus folgt aber $t(M : \alpha)_{Q_R(M)} = t(M : \alpha)_{M_{NNT_R(M)}} \subseteq M + N_{NNT_R(M)}$.

Wir wollen nun zeigen, dass M über R divisionsendlich ist, also, dass $D_R^{(\delta_R(M)-1)}(M)$ ein endlicher R -Modul ist. Dazu wählen wir ein $x \in D_R^{(\delta_R(M)-1)}(M)$. Dann finden wir ein Ideal α von R mit $\dim(R/\alpha) < \delta_R(M)-1$ derart, dass $x \in (M : \alpha)_{Q_R(M)}$.

Es gilt also $tx \in M + N_{NNT_R(M)}$. Mit geeigneten Elementen $m \in M$, $n \in N$ und $u \in NNT_R(M)$ können wir somit schreiben $tx = m + \frac{n}{u}$.

Für $\frac{n}{u}$ gilt nun offenbar $\frac{n}{u}\alpha = (tx-m)\alpha \subseteq tx\alpha + m\alpha \subseteq M \cap N_{NNT_R(M)}$.

Wegen $NNT_R(M) \subseteq NNT_R(M/N)$ ist aber $M \cap N_{NNT_R(M)} = N$, und wir erhalten $\frac{n}{u} \in (N : \alpha)_{NNT_R(M)}$. Somit folgt aber $s \frac{n}{u} \in N$, und

zusammen mit dem obigen folgt $stx = sm + s \frac{n}{u} \in M + N = M$.

Da diese Schlüsse für alle x gelten, folgt die Behauptung.

Nun können wir beweisen:

(4.2) Ist R noether'sch, M ein endlicher R -Modul und R/α über R divisionsendlich für alle Ideale α von R mit $\text{ann}_R(M) \subseteq \alpha$, $NNT_R(M) \subseteq NNT_R(R/\alpha)$, so ist auch M über R divisionsendlich.

Beweis: (Durch Induktion nach der Anzahl der Erzeugenden von M)
Ist M monogen, so folgt die Behauptung sofort aus der Tatsache, dass $M = R/\text{ann}_R(M)$.

Sei nun $M = \sum_{i=1}^n m_i R + mR$, und sei die Behauptung für alle R -Moduln mit höchstens n Erzeugenden schon richtig. Wir setzen $N = \sum_{i=1}^n m_i R$. Sei weiter, gemäss Voraussetzung, R/α über R divisionsendlich für jedes Ideal α von R mit $\alpha \supseteq \text{ann}_R(M)$, $NNT_R(M) \subseteq NNT_R(R/\alpha)$. Ist $\mathfrak{b}$ ein Ideal von R derart, dass $\mathfrak{b} \supseteq \text{ann}_R(N)$, $NNT_R(N) \subseteq NNT_R(R/\mathfrak{b})$, so folgt, wegen $\text{ann}_R(M) \subseteq \text{ann}_R(N)$ und $NNT_R(M) \subseteq NNT_R(N)$, dass $R/\mathfrak{b}$ über R divisionsendlich ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist also N divisionsendlich über R .

Sei $\alpha_1 \cap \dots \cap \alpha_r$ eine unverkürzbare Primärzerlegung von $\text{ann}_R(M/N)$, und sei α_i $\mathfrak{p}_i$ -primär. Weil M/N monogen ist gilt $M/N \cong R/\text{ann}_R(M)$. Ist nun $\mathfrak{q}_i \subseteq NNT_R(M)$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$,

so folgt nun $NT_R(M/N) = NT_R(R/\text{ann}_R(M/N)) = \bigcup \mathfrak{q}_i \subseteq NT_R(M)$ (1.4), und somit $NNT_R(M) \subseteq NNT_R(M/N)$. Nach (4.1) folgt nun, dass M divisionsendlich ist, denn es ist $\text{ann}_R(M/N) \supseteq \text{ann}_R(M)$ und $NNT_R(R/\text{ann}_R(M)) \supseteq NNT_R(M)$, also $M/N = R/\text{ann}_R(M/N)$ nach Voraussetzung divisionsendlich.

Sind einige der $\mathfrak{q}_i$, etwa $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t \not\subseteq NT_R(M)$, aber $\mathfrak{q}_{t+1}, \dots, \mathfrak{q}_r \subseteq NT_R(M)$, so finden wir ein $u \in NNT_R(M) \cap \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t$. Mit geeignetem $n \in \mathbb{N}$ folgt dann $u^n \in \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t$, $u^n \notin \mathfrak{q}_{t+1}, \dots, \mathfrak{q}_r$. Wir setzen nun $\hat{M} = u^n mR + N$. Da nun $u \in NNT_R(M)$, ist $NNT_R(M) = NNT_R(\hat{M})$ und $\text{ann}_R(M) = \text{ann}_R(\hat{M})$. Andererseits ist $\text{ann}_R(\hat{M}/N) = (N : u^n mR)_R = ((N : mR)_R : u^n)_R = (\text{ann}_R(M/N) : u^n)_R = (\mathfrak{q}_{t+1} : u^n)_R \cap \dots \cap (\mathfrak{q}_r : u^n)_R$, und daraus folgt, dass $\text{ann}_R(\hat{M}/N)$ eine Primärzerlegung besitzt, deren zugehörige Primideale alle in $NT_R(M) = NT_R(\hat{M})$ liegen. Nun schliessen wir wie oben, dass $\hat{M}$ über R divisionsendlich ist.

Wegen $u^n \in NNT_R(M)$ ist nun auch $NNT_R(u^n M) = NNT_R(\hat{M})$, und nach da $u^n M$ ein Untermodul von $\hat{M}$ ist, sieht man nun leicht, dass $u^n M$ über R divisionsendlich ist. Wegen $M \cong u^n M$ ($u^n \in NNT_R(M)$) folgt nun die Behauptung.

Nun ergibt sich:

(4.3) Ist R ein noether'scher, divisionsendlicher Integritätsbereich und M ein endlicher, torsionsfreier R -Modul, so ist M über R divisionsendlich.

Beweis: Die Torsionsfreiheit von M über R bedeutet dass $NNT_R(M) = R-(0)$, und die Behauptung folgt mit (4.2)

(4.4) Sei R ein noether'scher Integritätsbereich mit $\delta(R/aR) = \delta(R) - 1$ für alle $a \in R-(0)$, dann ist R divisionsendlich.

Beweis: Sofort nach (3.8).

Aus (4.3) und (4.4) folgt insbesondere:

(4.5) Jeder endliche, torsionsfreie R -Modul über dem lokalen, regulären Ring R ist über R divisionsendlich.

(4.6) Ist R noether'sch und R' eine endliche, ganze Erweiterung von R , die über R divisionsendlich ist, so ist R' über sich selbst divisionsendlich.

Beweis: O.B.d.A. können wir annehmen $\delta(R') = \delta > 1$.

Nach (2.5) folgt daraus $\delta_R(R') = \delta(R') = \delta > 1$, und wir sehen, dass

$R'' = D_R^{(\delta-1)}(R')$ ein endlicher R -Modul ist. Nach (3.2)b) ist

R'' ein Ring, also eine endliche, ganze Erweiterung von R' .

Wegen $NNT_R(R') \subseteq NNT(R')$ ist $R'' \subseteq \text{der}(R')$, und nach (3.9) a)

genügt es, die Divisionsendlichkeit von R'' nachzuweisen.

Wir zeigen sogar etwas mehr, nämlich $R'' = D^{(\delta(R'')-1)}(R'')$.

Nach (2.2) c) folgt zunächst, dass $\delta(R'') = \delta$, und wir haben zu

zeigen, dass $R'' = D^{(\delta-1)}(R'')$. Sei $R'' \neq D^{(\delta-1)}(R'')$. Dann gibt es

nach (3.6) b) ein $r'' \in NNT(R'')$ derart, dass $\delta(R''/r''R'') < \delta - 1$.

Wir finden ein $\mathfrak{g}'' \in \text{Ass}_{R''}(R''/r''R'')$ derart, dass $\dim(R''/\mathfrak{g}'') < \delta - 1$.

Weil R'' ganz ist über R folgt nach (1.3) d), dass $\dim(R/\mathfrak{g}'' \cap R) < \delta_R(R')$, und nach (2.1) e) finden wir ein $r \in NNT_R(R') \cap \mathfrak{g}'' =$

$= NNT(R') \cap (R \cap \mathfrak{g}'')$. Wegen $R'' \subseteq Q(R')$ ist dann $r \in NNT(R'')$ (s. (s.(1.2) b)), und nach (1.6) folgt schliesslich $\mathfrak{g}'' \in \text{Ass}_{R''}(R''/rR'')$.

Wir finden also ein $h'' \in R''$ derart, dass $(rR'' : h'')_{R''} = \mathfrak{g}''$.

Sei $\alpha = \text{ann}_R(R''/R')$. Nach (3.6) a) ist $\dim(R/\alpha) < \delta - 1$, denn

es ist $\alpha = \text{ann}_R(R''/R') \cap R$, und das Gewünschte folgt mit

(1.3) d). Bezeichnen wir nun $\alpha(\mathfrak{g}'' \cap R)$ mit $\mathfrak{h}$, so gilt:

$h''\mathfrak{h} \subseteq \alpha(\mathfrak{g}'' \cap R)h'' \subseteq \alpha rR'' \subseteq rR'$, also $\frac{h''}{r}\mathfrak{h} \subseteq R'$. Wegen $\dim(R/\mathfrak{h}) < \delta - 1$ (s. (3.1)) finden wir nach (2.1) e) ein $b \in NNT_R(R') \cap \mathfrak{h}$,

und es ist $\frac{h''}{r} \in \frac{1}{b}R' \subseteq R'_{NNT_R(R')}$. So ist schliesslich $\frac{h''}{r} \in$

$\in (R' : \mathfrak{h})_{R'_{NNT_R(R')}} \subseteq R''$, also $h'' \in rR''$ und somit $(rR'' : h'')_{R''} =$

$= R''$, also ein Widerspruch.

Nun ist es ein Leichtes, unsern Satz zu beweisen:

(4.7) Ist R ein lokaler, kompletter Ring mit dem Maximalideal $\mathfrak{m}$ und ist M ein endlicher R -Modul derart, dass $\chi(R/\mathfrak{m})1_R \in \text{ann}_R(M) \cup \text{NNT}_R(M)$, so ist M über R divisionsendlich.

Beweis: O.B.d.A. können wir annehmen, es sei $\delta_R(M) > 1$. Wir wollen uns zunächst überlegen, dass wir uns darauf beschränken können, den Satz für $M = R$ zu beweisen. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R mit $\text{ann}_R(M) \subseteq \mathfrak{a}$ und $\text{NNT}_R(M) \subseteq \text{NNT}_R(R/\mathfrak{a})$. Wenn wir nun wissen, dass $R/\mathfrak{a}$ über R divisionsendlich ist für jedes solche $\mathfrak{a}$, sind wir nach (4.2) fertig. Dazu genügt es aber, die Divisionsendlichkeit von $\bar{R} = R/\mathfrak{a}$ über sich selbst zu beweisen. Denn es gilt $\text{NNT}_R(M) \subseteq \text{NNT}_R(R/\mathfrak{a})$, und nach (2.1) d) wird $\delta_R(\bar{R}) = \delta(\bar{R}) \geq \delta_R(M) > 1$, und die Divisionsendlichkeit von $\bar{R}$ über R ist mit der Endlichkeit von $D_R^{(\delta_R(\bar{R})-1)}(\bar{R})$ über R gleichbedeutend. Dieser Modul ist nach (3.5) b) aber zu $D_R^{(\delta(\bar{R})-1)}(\bar{R})$ isomorph, so dass es tatsächlich genügt die Divisionsendlichkeit des lokalen, kompletten Ringes $\bar{R}$ nachzuweisen.

Aus $\chi(R/\mathfrak{m})1_R \in \text{ann}_R(M) \cup \text{NNT}_R(M) \subseteq \mathfrak{a} \cup \text{NNT}_R(\bar{R})$ folgt, dass $\chi(\bar{R}/\bar{\mathfrak{m}})1_{\bar{R}} \in (0) \cup \text{NNT}(\bar{R})$, und $\bar{R}$ erfüllt die Voraussetzungen unseres Satzes, sodass wir tatsächlich $M = R$ annehmen können.

Nach (1.12) gibt es einen lokalen, kompletten, regulären Ring S , über dem R eine endliche, ganze Erweiterung ist. Nach (4.6) genügt es nun zu zeigen, dass R über S divisionsendlich ist. Wir beweisen dies durch Induktion nach $\Delta(R)$.

Ist $\Delta(R) = 0$, so gilt für alle $\mathfrak{g} \in \text{Ass}(R)$ $\dim(R/\mathfrak{g}) = \dim(R) = \dim(S)$ (s. (1.3) c)) und daraus folgt, weil S ein Integritätsbereich ist, dass $\mathfrak{g} \cap S = (0)$. Nach (1.4) ist $\text{NT}(R) = \bigcup \{\mathfrak{g} \in \text{Ass}(R)\}$, und somit wird $\text{NT}_S(R) = \text{NT}(R) \cap S = (0)$. R ist also ein endlicher, torsionsfreier S -Modul, und somit nach (4.5) divisionsendlich über S .

Sei nun $\Delta(R) > 0$. Nach (4.2) haben wir zu zeigen, dass $\bar{S} = S/\mathfrak{k}$ für jedes Ideal $\mathfrak{k}$ von S mit $\text{NNT}_S(R) \subseteq \text{NNT}_S(\bar{S})$ divisionsendlich über S ist, denn es ist $\text{ann}_S(R) = (0)$. Unter den über $\mathfrak{k}$ gemachten Voraussetzungen folgt, dass $\delta_S(\bar{S}) \geq \delta_S(R) > 1$ (s. (2.1)d)), und es folgt wieder mit (3.5) b), dass wir zu zeigen haben, dass

${}_D(\delta(\overline{S})-1)(\overline{S})$ ein endlicher $\overline{S}$ -Modul ist, also, dass $\overline{S}$ über sich selbst divisionsendlich ist.

Ist nun $\mathfrak{h} = (0)$, also $\overline{S} = S$, folgt dieses Resultat aus (4.5).

Sei also $\mathfrak{h} \neq (0)$ und sei $\mathfrak{h}$ das Maximalideal von S . Dann gilt $\chi(\overline{S}/\mathfrak{h})1_{\overline{S}} = \chi(R/\mathfrak{m})1_{\overline{S}} \in (0) \cup \text{NNT}_S(R)/\mathfrak{h} \subseteq (0) \cup \text{NNT}(\overline{S})$. Mit (2.1) d) folgt aus $\text{NNT}_S(\overline{S}) \supseteq \text{NNT}_S(R)$ aber auch, dass $\delta(\overline{S}) = \delta_S(\overline{S}) \geq \delta_S(R)$. Nach (2.5) gilt zudem $\delta_S(R) = \delta(R)$, und es wird $\delta(\overline{S}) \geq \delta(R)$. Weil S ein Integritätsbereich ist, gilt weiter $\dim(\overline{S}) < \dim(S)$, und wir erhalten schliesslich $\dim(\overline{S}) < \dim(R)$. Nun folgt $\Delta(\overline{S}) = \dim(\overline{S}) - \delta(\overline{S}) < \dim(R) - \delta(R) = \Delta(R)$, und $\overline{S}$ ist nach Induktionsvoraussetzung über sich selbst divisionsendlich.

Das folgende Lemma sei für später noch bereitgestellt:

(4.8) Sind $R_1, \dots, R_n$ noether'sch und divisionsendlich, so ist

$$\text{es auch } R = \bigoplus_{i=1}^n R_i.$$

Beweis: Wegen $\text{Ass}(R) = \{R_1 \oplus \dots \oplus R_{h-1} \oplus \mathfrak{g}_h \oplus R_{h+1} \oplus \dots \oplus R_n \mid \mathfrak{g}_h \in \text{Ass}(R_h)\}$ folgt $\delta(R) = \min\{\delta(R_h) \mid h = 1, \dots, n\}$. Ist also ein $\delta(R_h) \leq 1$, so ist es auch $\delta(R)$, und R ist divisionsendlich. Ist $\delta(R_h) > 1$ für alle $h \in \{1, \dots, n\}$, so gibt es zu jedem R_h eine endliche, ganze Erweiterung $R'_h \subseteq \text{der}(R_h)$ derart, dass $\delta(R'_h/a'_h R'_h) \geq \delta(R_h) - 1$, für alle $a'_h \in \text{NNT}(R'_h)$ (s. (3.8)). Sei $R' = \bigoplus_{h=1}^n R'_h$. Dann ist offenbar $R' \subseteq \text{der}(R)$ und R' eine endliche, ganze Erweiterung von R . Ist nun $a' \in \text{NNT}(R')$, so gilt $a' = \bigoplus_{h=1}^n a'_h$, wobei $a'_h \in \text{NNT}(R'_h)$, und aus $\mathfrak{g}' \in \text{Ass}(R'/a'R')$ folgt, dass es ein $h \in \{1, \dots, n\}$ und ein $\mathfrak{g}'_h \in \text{Ass}_{R'_h}(R'_h/a'_h R'_h)$ derart gibt, dass $\mathfrak{g}' = R'_1 \oplus \dots \oplus R'_{h-1} \oplus \mathfrak{g}'_h \oplus R'_{h+1} \oplus \dots \oplus R'_n$, und es folgt schliesslich $\dim(R'/\mathfrak{g}') \geq \delta(R_h) - 1 \geq \delta(R) - 1$. Daraus folgt mit (3.8) die Behauptung.

5. Charakterische Ringe

Obwohl wir uns hauptsächlich für den analytischen Dimensionsdefekt von lokalen Integritätsbereichen interessieren, definieren wir, um die folgenden Beweise durchführen zu können, eine Klasse von Ringen, welche die Integritätsbereiche umfasst.

Definition: R heisst charakterisch, wenn für jedes Maximalideal $\mathfrak{m}$ von R gilt: $\chi(R/\mathfrak{m})1_R \in (0) \cup \text{NNT}(R)$.

Es gelten zunächst die folgenden einfachen Beziehungen:

- (5.1) a) Jeder Integritätsbereich ist charakterisch.
- b) Ist $R \subseteq R'$ und $R \leq R'$, und ist R' charakterisch, so ist es auch R .
Ist R' torsionsfrei über R und R charakterisch, so ist es auch R' .
Insbesondere folgt also aus der Ganzheit von R' über R , dass R charakterisch ist, wenn R' es ist. Ist $R' \subseteq \text{der}(R)$, so ist R' charakterisch, wenn R es ist.
- c) Ist R nöther'sch und charakterisch, so ist für alle Nichteinheiten $a \in \text{NNT}(R) \cap \bigcap_{\text{max.}} \text{NNT}_{R'}(R/\chi(R/\mathfrak{m})R)$ R/aR charakterisch.
- d) Ist R charakterisch und $\mathfrak{g} \in \text{Spec}(R)$, so ist $R_{\mathfrak{g}}$ charakterisch.
- e) Ist R halblokal und charakterisch, so ist R^* charakterisch.

Beweis: a) trivial.

b) Sei $\mathfrak{m}$ ein Maximalideal von R . Dann ist $\mathfrak{m}R' \neq R'$ und wir finden ein $\mathfrak{m}'R'$ umfassendes Maximalideal $\mathfrak{m}'$ von R' . Dann ist sicher $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap R$, und es ist $\chi(R/\mathfrak{m}) = \chi(R'/\mathfrak{m}')$. Andererseits gilt auch $\text{NNT}(R') \cap R \subseteq \text{NNT}(R)$, und es folgt $\chi(R/\mathfrak{m})1_R \in \text{NNT}(R) \cup (0)$. Sei nun R' torsionsfrei über R und charakterisch. Sei $\mathfrak{m}'$ ein Maximalideal von R' . Dann ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap R$ ein Maximalideal von R ,

und es folgt $\chi(R'/\mathfrak{m}') = \chi(R/\mathfrak{m})$. Aus der Torsionsfreiheit von R' über R folgt weiter $\text{NNT}(R) = \text{NNT}(R') \cap R$ (s. (1.2) a)), und es wird $\chi(R'/\mathfrak{m}')1_R = \chi(R/\mathfrak{m})1_R \in (0) \cup \text{NNT}(R')$.

c) Sei $\overline{\mathfrak{m}}$ ein Maximalideal von $\overline{R} = R/aR$. Dann gibt es ein Maximalideal $\mathfrak{m}$ von R , das aR umfasst, und für das gilt $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/aR$. Somit folgt $\chi(\overline{R}/\overline{\mathfrak{m}}) = \chi(R/\mathfrak{m})$. Sei nun $\chi(\overline{R}/\overline{\mathfrak{m}})1_{\overline{R}} \neq 0$. Dann ist $\chi(R/\mathfrak{m})1_R$ sicher erst recht $\neq 0$, also folgt $\chi(R/\mathfrak{m})1_R \in \text{NNT}(R)$. Nach Voraussetzung ist nun $a \in \text{NNT}_R(R/\chi(R/\mathfrak{m})R)$, und somit nach (1.8) $\chi(R/\mathfrak{m})1_R \in \text{NNT}_R(R/aR)$, also $\chi(\overline{R}/\overline{\mathfrak{m}})1_{\overline{R}} = \chi(R/\mathfrak{m})1_{\overline{R}} \in \text{NNT}(\overline{R})$.

d) Ist $\chi(R_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}}) = 0$, so ist die Behauptung klar. Andernfalls ist $\chi(R_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}})1_{R_{\mathfrak{g}}} \in R_{\mathfrak{g}}$, also $\chi(R_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}})1_R \in \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{m}$, wo $\mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{g}$ umfassendes Maximalideal von R ist. Somit folgt $\chi(R/\mathfrak{m}) \mid \chi(R_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}})$, also, da $\chi(R_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}})$ eine Primzahl ist, dass $\chi(R/\mathfrak{m}) = \chi(R_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}})$ und es folgt schliesslich $\chi(R_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}})1_R = \chi(R/\mathfrak{m})1_R \in (0) \cup \text{NNT}(R)$, also $\chi(R_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}})1_{R_{\mathfrak{g}}} \in (0) \cup \text{NNT}(R_{\mathfrak{g}})$.

e) folgt mit (1.9) c) und d) aus b).

(5.2) Ist R halblokal und charakterisch, so ist R^* divisionsendlich.

Beweis: Wegen $R^* = \bigoplus_{\text{max.}} (R_{\mathfrak{m}})^*$ (s. (1.9) a)) ist nach (4.8)

nur zu zeigen, dass alle $(R_{\mathfrak{m}})^*$ divisionsendlich sind. Nach (5.1) d) und e) Sind alle $(R_{\mathfrak{m}})^*$ charakterisch, und die Behauptung folgt mit (4.7).

Aus (3.9) b) und (5.2) ergibt sich nun sofort:

(5.3) Ist R halblokal und charakterisch, so ist $\delta(R) = 0$, oder R besitzt eine endliche, ganze Erweiterung $R' \subseteq \text{der}(R)$ derart, dass $\delta(R'/a'R') \geq \delta^*(R) - 1$ für alle $a' \in \text{NNT}(R')$.

Insbesondere ergibt sich nun:

(5.4) Ein 2-dimensionaler, halblokal Integritätsbereich ist genau dann ungemischt, wenn er eine endliche, ganze Erweiterung in seinem Quotientenkörper besitzt, die macaulay'sch ist.

Beweis: Sei R ein 2-dimensionaler, halblokal Integritätsbereich. Ist R ungemischt, so gibt es nach (5.1) a) und (5.3) eine endliche, ganze Erweiterung $R' \subseteq \text{der}(R)$ von R derart, dass für alle $\mathfrak{g}'$, die zu einem Hauptideal von R' gehören $\dim(R'/\mathfrak{g}') = 1$, also $\mathfrak{g}'$ kein Maximalideal ist. Wegen $\dim(R) = \dim(R') = 2$ ((1.3) c)) ist R' macaulay'sch.

Die Umkehrung folgt aus der Tatsache, dass ein halblokal Macaulay-Ring ungemischt ist ([2], pg. 125, (34.9)) mit (2.4)a).

Nun wollen wir zeigen, dass es in einem lokalen Integritätsbereich höchstens endlich viele zu einem Hauptideal von R gehörige $\mathfrak{g} \in \text{Spec}(R)$ gibt, für welche $\Delta^*(R) < \Delta^*(R/\mathfrak{g})$.

Dazu zeigen wir zunächst:

(5.5) Sei R noether'sch und $S \subseteq \text{NNT}(R)$ multiplikativ abgeschlossen. Sei $a \in S$ und $\mathfrak{g} \in \text{Ass}_R(R/aR)$. Dann gilt $\mathfrak{g} = \text{ann}_R((R : \mathfrak{g})_{R_S}/R)$. Ist $R' = \bigcup_{\alpha \in I} (R : \alpha)_{R_S}$, so folgt insbesondere $\text{ann}_R(R'/R) \subseteq \mathfrak{g}$.

Beweis: Wegen $\mathfrak{g} \in \text{Ass}_R(R/aR)$ finden wir ein $b \in R$ derart, dass $(aR : b)_R = \mathfrak{g}$. Wir setzen nun $M = R + \frac{b}{a} R$. Dann ist $M \subseteq R_S$, und es gilt $\mathfrak{g}M \subseteq R + \frac{b}{a} \mathfrak{g} \subseteq R$. Es ist also $M \subseteq R'$. Andererseits ist nun $\text{ann}_R(M/R) = (R : \frac{b}{a} R)_R = (aR : b)_R = \mathfrak{g}$.

(5.6) Sei R noether'sch und $D^{(m)}(R)$ ein endlicher R -Modul. Sei weiter $\mathcal{P} = \{\mathfrak{g} \in \text{Spec}(R) \mid \exists a \in \text{NNT}(R) : \mathfrak{g} \in \text{Ass}_R(R/aR)\}$. Dann gibt es nur endlich viele $\mathfrak{g} \in \mathcal{P}$ mit $\dim(R/\mathfrak{g}) < m$. Ist insbesondere R divisionsendlich, so gibt es nur endlich viele $\mathfrak{g} \in \mathcal{P}$ mit $\dim(R/\mathfrak{g}) < \delta(R) - 1$.

Beweis: Sei $0 \leq n < m$. Wir setzen $\mathcal{P}_n = \{\mathfrak{g} \in \mathcal{P} \mid \dim(R/\mathfrak{g}) = n\}$. Wenn wir zeigen können, dass $\mathcal{P}_n$ endlich ist, sind wir fertig. Sei also $\mathfrak{g} \in \mathcal{P}_n$. Nach (5.5) gilt dann $\mathfrak{g} \supseteq \text{ann}_R(D_R^{(n+1)}(R)/R)$. Nach (3.3) b) ist nun $D^{(n+1)}(R)$ ein endlicher R -Modul, und nach (3.6)a) ist $\mathfrak{a} = \text{ann}_R(D^{(n+1)}(R)/R) \in I^{(n+1)}(R)$, also $\dim(R/\mathfrak{a}) \leq n$. Wegen $\dim(R/\mathfrak{g}) = n$ folgt daraus, dass $\mathfrak{g}$ ein minimaler Primdivisor von $\mathfrak{a}$ ist. Die Elemente von $\mathcal{P}_n$ sind also minimale Primdivisoren von $\mathfrak{a}$, und somit ist $\mathcal{P}_n$ endlich.

(5.7) Ist R halblokal und charakteristisch, so gibt es nur endlich viele $\mathfrak{g}^* \in \text{Spec}(R^*)$ mit $\dim(R^*/\mathfrak{g}^*) < \delta^*(R) - 1$, welche zu einem durch einen Nichtnullteiler erzeugten Ideal gehören.

Beweis: Sofort (5.2) und (5.6)

Nun erhalten wir:

(5.8) Ist R halblokal und charakteristisch und ist $\mathcal{P} = \{\mathfrak{g} \in \text{Spec}(R) \mid \exists a \in \text{NNT}(R): \mathfrak{g} \in \text{Ass}_R(R/aR)\}$, so gilt für alle bis auf höchstens endlich viele $\mathfrak{g} \in \mathcal{P}$: $\delta^*(R/\mathfrak{g}) \geq \delta^*(R) - 1$, also insbesondere $\Delta^*(R/\mathfrak{g}) \leq \Delta^*(R)$.

Beweis: Sei $\mathfrak{g} \in \mathcal{P}$ mit $\delta^*(R/\mathfrak{g}) > \delta^*(R) - 1$. Sei $a \in \text{NNT}(R)$, $\mathfrak{g} \in \text{Ass}_R(R/aR)$ und sei $\mathfrak{g}^* \in \text{Ass}_{R^*}(R^*/\mathfrak{g}R^*)$ mit $\dim(R^*/\mathfrak{g}^*) < \delta^*(R) - 1$. Nach (1.9) h) gilt nun $\mathfrak{g}^* \in \text{Ass}_{R^*}(R^*/aR^*)$, und nach (1,10) folgt $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^* \cap R$. Daraus folgt nach (5.7) die Behauptung.

Wir haben nun eine Aussage über die Menge der Primideale $\mathfrak{g} \in \text{Spec}(R)$ gewonnen, für welche $\Delta^*(R/\mathfrak{g}) \leq \Delta^*(R)$. Um uns diesen in (5.8) gewonnen Tatverhalt zu veranschaulichen, setzen wir:

Definition: Ist R halblokal, so nennen wir $\mathfrak{g} \in \text{Spec}(R)$ kritisch, wenn $\Delta^*(R/\mathfrak{g}) > \Delta^*(R)$. Die Menge der kritischen $\mathfrak{g}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(R)$.

Jetzt folgt aus dem Vorangehenden:

(5.9) Ist R ein lokaler Integritätsbereich, so gibt es höchstens endlich viele $\mathfrak{g} \in \mathcal{K}(R)$ vom Rang 1.

Beweis: Unmittelbar aus (5.8), denn jedes solche $\mathfrak{g}$ gehört zu $\mathcal{P}$.

Wir wollen uns (5.9) durch ein geometrisches Analogon veranschaulichen. Sei nämlich k ein algebraisch abgeschlossener Körper, V eine affine k -Varietät und R der lokale Ring von V in einem festen Punkt $P \in V$. Sei weiter $\mathcal{K} \subseteq \text{Spec}(R)$ so, dass $\mathcal{K}$ die Eigenschaft (5.9) hat. Nun entsprechen die Untervarietäten von V die durch P gehen eindeutig den Primidealen $\mathfrak{g} \in \text{Spec}(R)$ ([7], pg. 15). Bezeichnen wir nun mit $\mathcal{K}(V, P)$ die Menge der Varietäten, die Primidealen aus $\mathcal{K}$ entsprechen, so folgt:

(5.10) Es gibt höchstens endlich viele $W \in \mathcal{K}(V, P)$ mit einer um eins kleineren Dimension als V .

Wir finden also eine echte Untermannigfaltigkeit von V , welche alle $W \in \mathcal{K}(V, P)$ enthält, die eine um 1 kleinere Dimension als V haben.

U. Schweizer führt in [6] die folgende Klasse K von noether'schen Integritätsbereichen ein (s. pg. 28):

- (a) Jeder Körper gehört zu K .
- (b) R gehört zu K , wenn es eine endliche, ganze, nullteilerfreie Erweiterung R' von R derart gibt, dass $R'/\mathfrak{g}'$ für alle $\mathfrak{g}' \neq (0)$ in $\text{Spec}(R')$ zu K gehört, und wenn es in jedem Maximalideal von R' ein $a' \in R' - (0)$ derart gibt, dass alle $\mathfrak{g}' \in \text{Ass}_R(R'/a'R')$ vom Rang 1 sind.

In [6] wird nun gezeigt, dass jeder lokale, universal-katenarische Ring der Klasse K ungemischt ist. Zum Begriff "universalkatenarisch" sei dabei auf [1] pg. 84 verwiesen.

Wir führen nun eine umfassendere Klasse von noether'schen Integritätsbereichen ein, die wir mit $\hat{K}$ bezeichnen.

- (c) Jeder Körper gehöre zu $\hat{K}$
- (d) R gehört zu $\hat{K}$, wenn es eine endliche, ganze Erweiterung R' von R und in jedem Maximalideal von R' ein $a' \in \text{NNT}(R')$ derart gibt, dass alle $\mathfrak{p}' \in \text{Ass}_{R'}(R'/a'R')$ vom Rang 1 sind und $R'/\mathfrak{p}'$ zu $\hat{K}$ gehört.

Offenbar ist $K \subseteq \hat{K}$.

Wir zeigen nun:

(5.11) Ist R ein halblokal, universalkatenarischer Integritätsbereich, so ist $R \in \hat{K}$ mit der Ungemischtheit von R gleichbedeutend.

Beweis: Sei zunächst R ungemischt. Dann wollen wir durch Induktion nach $\dim(R)$ zeigen, dass $R \in \hat{K}$. Ist $\dim(R) = 1$, so setzen wir $R = R'$, und sind fertig. Sei nun $\dim(R) > 1$. Nach (5.3) besitzt R nun eine endliche, ganze Erweiterung $R' \subseteq \text{der}(R)$ derart, dass kein Hauptideal in R' eingebettete Komponenten hat.

Seien nun $\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_s$ die Primideale von $\mathcal{K}(R')$ vom Rang 1.

Weil R' halblokal ist folgt mit (1.1) sofort, dass $\bigcup_{i=1}^s \mathfrak{p}'_i \neq \text{Rad}(R')$, und wir finden ein $a' \in \text{Rad}(R') - \bigcup_{i=1}^s \mathfrak{p}'_i$. Nun ist für jedes $\mathfrak{p}' \in \text{Ass}_{R'}(R'/a'R')$ $R'/\mathfrak{p}'$ ungemischt. Andererseits ist nach (1.3) $\dim(R'/\mathfrak{p}') < \dim(R)$, und nach Induktionsvoraussetzung folgt $R'/\mathfrak{p}' \in \hat{K}$.

Der Beweis der Umkehrung lässt sich aus [6] wörtlich übertragen.

Insbesondere wird aus diesem Beweis klar, dass man zur gleichen Klasse $\hat{K}$ gelangt, wenn man in (d) zusätzlich verlangt $R' \subseteq \text{der}(R)$.

Schliesslich wollen wir noch beweisen:

(5.12) Ein halblokal, ungemischter Integritätsbereich
 R liegt genau dann in K , wenn $\mathcal{K}(R) = \emptyset$.

Beweis: Dass aus $R \in K$ $\mathcal{K}(R) = \emptyset$ folgt, liegt daran, dass K gegenüber Restklassenbildung abgeschlossen ist.

Die Umkehrung beweisen wir durch Induktion nach $\dim(R)$.
 Für $\dim(R) \leq 1$ ist die Behauptung klar. Sei also $\dim(R) > 1$.
 Dann gilt nach (5.11) $R \in \hat{K}$, und wir wählen einen Ring $R' \subseteq \subseteq \text{der}(R)$ gemäss (d). Nun ist zu zeigen, dass $R'/\mathfrak{g}' \in K$,
 für alle $\mathfrak{g}' \in \text{Spec}(R) - (0)$. Dies folgt nach Induktions-
 voraussetzung sofort, wenn wir zeigen können, dass $\mathcal{K}(R') = \emptyset$.
 Sei also $\mathfrak{g}' \in \text{Spec}(R') - (0)$. Wir haben zu zeigen, dass $R'/\mathfrak{g}'$
 ungemischt ist. Wegen $\mathcal{K}(R) = \emptyset$ ist $R/\mathfrak{g}' \cap R$ ungemischt, und
 nach [2] (10.12) und (1.11) ist $(R'/\mathfrak{g}')^*$ eine endliche, ganze,
 torsionsfreie Erweiterung von $(R/\mathfrak{g}' \cap R)^*$, und das Gewünschte
 folgt mit (2.2) b).

6. Quasireguläre Folgen

Nach [1] (Chap. 6. pg.95) heisst eine Folge $x_1, \dots, x_r$
 aus R R -regulär, wenn $x_1 \in \text{NNT}(R)$ und $x_i \in \text{NNT}_R(R/\sum_{j=1}^i x_j R)$
 für $1 \leq i \leq r$.

Ist R halblokal, so besitzen alle maximalen R -regulären
 Folgen aus $\text{Rad}(R)$ dieselbe Länge ([1], pg. 97). Diese Länge
 wird als die Tiefe von R bezeichnet, und mit $\text{depth}(R)$ abge-
 kürzt. Durch Induktion nach $\text{depth}(R)$ folgt nun leicht $\text{depth}(R) =$
 $= \text{depth}(R^*)$.

Ebenfalls durch Induktion nach $\text{depth}(R)$ sieht man, dass $\delta(R) \geq \text{depth}(R)$. Ist nämlich $\text{depth}(R) = 0$, so ist nichts zu beweisen. Ist $\text{depth}(R) > 0$, so gibt es ein $x \in \text{NNT}(R) \cap \text{Rad}(R)$ und aus der Invarianz der Längen der maximalen R -regulären Folgen aus $\text{Rad}(R)$ sieht man nun leicht, dass $\text{depth}(R/xR) = \text{depth}(R) - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist nun $\delta(R/xR) \geq \text{depth}(R/xR) = \text{depth}(R) - 1$, und mit (2.1) c) folgt nun $\delta(R) \geq \text{depth}(R)$.

Zusammen mit $\text{depth}(R) = \text{depth}(R^*)$ erhalten wir also:

(6.1) ist R halblokal, so gilt $\text{depth}(R) \leq \delta^*(R)$.

Nun wollen wir den Begriff der R -regulären Folge geeignet erweitern. Nämlich so, dass für einen halblokalen charakteristischen Ring R $\delta^*(R)$ zum Maximum der R -quasiregulären Folgen aus $\text{Rad}(R)$ wird. Der Begriff "quasiregulär" sei dabei wie folgt definiert.

Definition: Sei $x_1, \dots, x_r \in R$. $(x_1, \dots, x_r)$ heiße R -quasiregulär, wenn es eine endliche, ganze Erweiterung R' von R derart gibt, dass $x_1 \in \text{NNT}(R')$ und $(\overline{x_2}, \dots, \overline{x_r})$ R'/x_1R' -quasiregulär ist.

Setzt man in dieser Definition $R' = R$, so erhält man die Definition der R -regulären Folge. Jede R -reguläre Folge ist also auch R -quasiregulär.

Nun wollen wir wieder einige elementare Eigenschaften der R -quasiregulären Folgen beweisen.

(6.2) Sei $\hat{R}$ eine flache R -Algebra, $x_1, \dots, x_r \in R$ und $\sum_{i=1}^r x_i \hat{R} \neq \hat{R}$. Sei weiter $(x_1, \dots, x_r)$ R -quasiregulär. Dann ist $(x_1, \dots, x_r)$ auch $\hat{R}$ -quasiregulär.

Beweis: (Induktion nach r). Ist $r = 1$, so ist $x_1 \in \text{NNT}(R)$, und nach (1.13) folgt $x_1 \in \text{NNT}(\hat{R})$.

Sei nun $r > 1$, und R' eine endliche, ganze Erweiterung von R derart, dass $x_1 \in \text{NNT}(R')$ und $(\overline{x}_2, \dots, \overline{x}_r)$ $R'/x_1 R'$ -quasiregulär ist. Wir setzen $\tilde{R} = R' \otimes_R \hat{R}$. Nach (1.13)c) und b) ist R eine endliche, ganze Erweiterung von $\hat{R}$ und R' -flach. Nach (1.3) a) ist somit $x_1 \in \text{NNT}(\tilde{R})$. Nach (1.3) d) ist $\tilde{R}/x_1 \tilde{R}$ aber auch $R'/x_1 R'$ -flach. Nach (1.3) f) folgt aus der Ganzheit von $\tilde{R}$ über $\hat{R}$, dass $\sum_{i=1}^r x_i \tilde{R} \neq \tilde{R}$, und daraus erhalten wir $\sum_{i=1}^r x_i \tilde{R}/x_1 \tilde{R} \neq R/x_1 \tilde{R}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist nun $(\overline{x}_2, \dots, \overline{x}_r)$ $\tilde{R}/x_1 \tilde{R}$ -quasiregulär, und wir sind fertig.

Nun erhalten wir als Anwendung:

(6.3) Sei $(x_1, \dots, x_r)$ R -quasiregulär, $\sum_{i=1}^r x_i R \neq R$.

a) Ist $S \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen und $(\sum_{i=1}^r x_i R) \cap \eta S = \emptyset$, so ist $(x_1, \dots, x_r)$ R_S -quasiregulär.

b) Falls R halblokal ist, ist $(x_1, \dots, x_r)$ R^* -quasiregulär.

Beweis: In der Tat sind R_S und R^* flache R -Algebren ((1.14))

$\sum_{i=1}^r x_i R_S \neq R_S$ folgt aus der in a) gemachten Voraussetzung, $\sum_{i=1}^r x_i R^* \neq R^*$ folgt aus $\sum_{i=1}^r x_i R \neq R$ mit der Treueflachheit von R^* über R (s. (1.14)). Nach (6.2) folgt daraus die Behauptung.

(6.4) Ist R noether'sch und $x_1, \dots, x_r \in \text{Rad}(R)$, und ist $(x_1, \dots, x_r)$ R -quasiregulär, so gilt $r \leq \delta(R)$.

Beweis: Ist $r = 1$, so ist $\text{Rad}(R) \cap \text{NNT}(R) \neq \emptyset$, also ist nach (1.4) und (1.1) a) kein $\mathfrak{y} \in \text{Ass}(R)$ Maximalideal in R , und es ist, nach (2.1) b), $r \leq \delta(R)$.

Ist $r > 1$ und R' eine endliche, ganze Erweiterung von R derart, dass $x_1 \in \text{NNT}(R')$ und $(\overline{x}_2, \dots, \overline{x}_r)$ $R'/x_1 R'$ -quasiregulär ist, so folgt wegen $\text{Rad}(R') \supseteq \text{Rad}(R)$ und nach Induktionsvoraussetzung, dass $r-1 \leq \delta(R'/x_1 R')$. Wegen $x_1 \in \text{Rad}(R') \cap \text{NNT}(R')$ folgt nun nach (2.1)c), dass $r \leq \delta(R')$, und somit nach (2.2) a), dass $r \leq \delta(R)$.

(6.5) Ist R halblocal, $x_1, \dots, x_r \in \text{Rad}(R)$ und $(x_1, \dots, x_r)$ R -quasiregulär, so ist $r \leq \delta^*(R)$.

Beweis: Nach (6.2) ist $(x_1, \dots, x_r)$ R^* -quasiregulär, und wegen $\text{Rad}(R) \subseteq \text{Rad}(R^*)$ ((1.9) c)) folgt mit (6.4) die Behauptung.

(6.6) Ist R noether'sch und $(x_1, \dots, x_r)$ R -quasiregulär, $\sum_{i=1}^r x_i R \neq R$, so ist $(x_1, \dots, x_r)$ ein Parametersystem von R .

Beweis: Ist $r = 1$, so folgt die Behauptung wegen $x_1 \in \text{NNT}(R)$.

Ist $r > 1$ und R' eine endliche, ganze Erweiterung von R mit $x_1 \in \text{NNT}(R')$, $(\overline{x}_2, \dots, \overline{x}_r)$ $R'/x_1 R'$ -quasiregulär, so ist, nach Induktionsvoraussetzung, $(\overline{x}_2, \dots, \overline{x}_r)$ ein Parametersystem von $R'/x_1 R'$. Wegen $x_1 \in \text{NNT}(R')$ ist dann $(x_1, \dots, x_r)$ ein Parametersystem von R' . Weil R' ganz ist über R , folgt nun nach (1.3) e) : $\dim(R/x_1 R + \dots + x_r R) = \dim(R'/x_1 R' + \dots + x_r R') = \dim(R) - r$, und $(x_1, \dots, x_r)$ besitzt die gewünschte Eigenschaft.

Für einen halblokalen Ring R ist, wie wir gesehen haben, $\delta^*(R)$ mindestens so gross wie die Länge einer beliebigen R -quasiregulären Folge aus $\text{Rad}(R)$. Wir werden im folgenden zeigen, dass es im Fall, wo R charakteristisch ist, tatsächlich eine solche Folge der Länge $\delta^*(R)$ gibt.

(6.7) Sei R halblocal und charakteristisch, sei $\delta^*(R) > 0$ und R' der (R) eine endliche, ganze Erweiterung von R derart, dass für alle $a' \in \text{NNT}(R')$ gilt $\delta(R'/a'R') \geq \delta^*(R) - 1$. Sei weiter $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R mit $\dim(R/\mathfrak{a}) < \delta^*(R) - 1$. Sei $s' \in \text{NNT}(R')$. Dann gibt es ein $x \in \mathfrak{a} \cap \text{NNT}(R')$ derart, dass R'/xR' charakteristisch ist und $s' \in \text{NNT}_{R'}(R'/xR')$ und $\delta^*(R'/xR') = \delta^*(R) - 1$.

Beweis: Nach (2.3) b) ist $\delta^*(R) = \delta^*(R')$, und wir bezeichnen diese Grösse mit δ^* . Sei $\mathcal{P}' = \{\mathfrak{p}' \in \text{Spec}(R') \mid \exists a' \in \text{NNT}(R') \text{ mit } \mathfrak{p}' \in \text{Ass}_{R'}(R'/a'R')\}$. Nach (5.1) b) ist R' wieder charakteristisch,

und gemäss (5.8) ist $\mathcal{P}'' = \{ \mathfrak{g}' \in \mathcal{P}' \mid \delta^*(R'/\mathfrak{g}') < \delta^* - 1 \}$ endlich. Ebenso ist $\mathcal{Q}'' = \bigcup_{\max, R'} \text{Ass}_{R'}(R'/\chi(R'/\mathfrak{m})R')$ endlich, denn

R' ist halblokal. Somit ist schliesslich auch $\mathcal{Q}' = \mathcal{P}' \cup \mathcal{Q}'' \cup \text{Ass}(R') \cup \text{Ass}_{R'}(R'/s'R')$ endlich, und für jedes $\mathfrak{q}' \in \mathcal{Q}'$ gilt $\dim(R'/\mathfrak{q}') \geq \delta^* - 1$. Dann ist auch $\mathcal{Q} = \{ \mathfrak{q}' \cap R \mid \mathfrak{q}' \in \mathcal{Q}' \}$ endlich und nach (1.3) d) ist $\dim(R/\mathfrak{q}) \geq \delta^* - 1$ für alle $\mathfrak{q} \in \mathcal{Q}$. Nach (1.1)a) gilt nun $\alpha \not\subseteq \bigcup \mathcal{Q}$, denn sonst wäre $\alpha s \mathfrak{q}$ für ein geeignetes $\mathfrak{q} \in \mathcal{Q}$, also $\dim(R/\alpha) \geq \dim(R/\mathfrak{q}) \geq \delta^* - 1$. Sei also $x \in \alpha - \bigcup \mathcal{Q}$

Nach (1.4) ist dann $x \in \text{NNT}_{R'}(R'/s'R')$, also, nach (1.8), $s'x \in \text{NNT}_{R'}(R'/xR')$. Ebenso ist $x \in \text{NNT}_{R'}(R'/\chi(R'/\mathfrak{m})R')$ für jedes Maximalideal $\mathfrak{m}$ von R' , und nach (5.1) c) ist $R'/\bar{x}R'$ charakteristisch. Wegen $x \in \alpha \subseteq \text{Rad}(R)$ folgt $x \in \text{Rad}(R')$ (s. (1.3) f)) und mit (2.3) c) ergibt sich daraus $\delta^*(R'/xR') < \delta^*$. Sei nun $\mathfrak{g}'^* \in \text{Ass}_{R'^*}(R'^*/xR'^*)$. Nach (1.9) g) bleibt zu zeigen, dass $\dim(R'^*/\mathfrak{g}'^*) \geq \delta^* - 1$. Nach (1.9) h) und (1.10) folgt nun, dass $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'^* \cap R' \in \mathcal{P}'$ und $\mathfrak{g}'^* \in \text{Ass}_{R'}(R'^*/\mathfrak{g}'R'^*)$. Wegen $x \notin \bigcup_{\mathfrak{g}'' \in \mathcal{P}''} \mathfrak{g}''$ folgt $\mathfrak{g}' \in \mathcal{P}' - \mathcal{P}''$, und es ist $\dim(R'^*/\mathfrak{g}'^*) \geq \delta^*(R'/\mathfrak{g}') \geq \delta^* - 1$.

Nun gelangen wir zum zentralen Satz dieses Abschnittes.

(6.8) Ist R halblokal, $R' \subseteq \text{der}(R)$ eine endliche, ganze Erweiterung von R , α ein Ideal von R mit $\dim(R/\alpha) = d$, so gibt es Elemente $x_1, \dots, x_{\delta^*(R)-d} \in \text{Rad}(R) \cap \sqrt{\alpha}$ derart, dass $(x_1, \dots, x_{\delta^*(R)-d})$ R' -quasiregulär ist.

Beweis: (Induktion nach $\delta^*(R)-d$)

Ist $\delta^*(R)-d \leq 0$, so ist nichts zu beweisen. Ist $\delta^*(R)-d = 1$, so ist $\alpha \cap \text{Rad}(R) \not\subseteq \text{NT}(R)$. Denn sonst wäre nach (1.4) und (1.1)a) $\alpha \cap \text{Rad}(R) \subseteq \mathfrak{g}$ mit einem geeigneten $\mathfrak{g} \in \text{Ass}(R)$, und es wäre $\dim(R/\alpha) = \dim(R/\sqrt{\alpha} \cap \text{Rad}(R)) \geq \delta(R) \geq \delta^*(R)$, also $\delta^*(R)-d \leq 0$. Wir finden also ein $x_1 \in \alpha \cap \text{Rad}(R) \cap \text{NNT}(R)$, und wegen $R' \subseteq \text{der}(R)$ ist $x_1 \in \text{NNT}(R')$, also R' -quasiregulär.

Sei also $\delta^*(R)-d > 1$. Dann ist, nach (2.4)b), $\delta^*(R) = \delta^*(R') > 1$.

Nach (5.1) b) ist R' charakterisch, und nach (5.3) gibt es eine endliche, ganze Erweiterung R'' von R' in der(R') derart, dass $\delta^*(R''/\mathfrak{a}''R'') \geq \delta^*(R) - 1$, für alle $\mathfrak{a}'' \in \text{NNT}(R'')$. Insbesondere finden wir also ein $c \in \text{NNT}(R)$ derart, dass $cR'' \subseteq R$. Weiter ist $\dim(R/\mathfrak{a}) = \dim(R/\sqrt{\mathfrak{a}} \cap \text{Rad}(R)) = d < \delta^*(R) - 1$. Nach (6.7) finden wir nun ein $x_1 \in \text{NNT}(R) \cap (\mathfrak{a} \cap \text{Rad}(R))$ derart, dass $R''/x_1 R''$ charakterisch ist, $c \in \text{NNT}_{R''}(R''/x_1 R'')$ und $\delta^*(R''/x_1 R'') = \delta^*(R) - 1$.

Sei $\bar{R} = R/x_1 R'' \cap R$, $\bar{R}'' = R''/x_1 R''$. Aus $cR'' \subseteq R$ und $c \in \text{NNT}_R(\bar{R}'')$ folgt $c\bar{R}'' \subseteq \bar{R}$, $\bar{c} \in \text{NNT}(\bar{R})$ und es ist $\bar{R}''$ eine endliche, ganze Erweiterung von $\bar{R}$ in der($\bar{R}$).. Nach (5.1) b) ist $\bar{R}$ auch charakterisch, und nach (2.4) b) gilt $\delta^*(\bar{R}) = \delta^*(\bar{R}'') = \delta^*(R) - 1$. Weil R'' über R ganz ist, folgt, wie man leicht aus (1.3) a) entnimmt, dass $x_1 R'' \cap R \subseteq \sqrt{x_1 R} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a} \cap \text{Rad}(R)} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \text{Rad}(R)$. Somit folgt $\dim(\bar{R}/\bar{\mathfrak{a}}) = \dim(R/\sqrt{\mathfrak{a}}) = \dim(R/\mathfrak{a}) = d$, und es wird $\delta^*(\bar{R}) - \dim(\bar{R}/\bar{\mathfrak{a}}) = \delta^*(R) - d - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung finden wir nun $x_2, \dots, x_{\delta^*(R)-d} \in \mathfrak{a} \cap \text{Rad}(R)$ derart, dass $(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{\delta^*(R)-d}) \bar{R}''$ -quasiregulär ist. Wegen $x_1 \in \text{NNT}(R'')$ und weil R'' endlich und ganz ist über R' folgt, dass $(x_1, \dots, x_{\delta^*(R)-d})$ R' -quasiregulär ist.

Nun folgt:

(6.9) Ist R halblokal und charakterisch, so gibt es eine R -quasireguläre Folge $(x_1, \dots, x_{\delta^*(R)})$ mit $x_1, \dots, x_{\delta^*(R)} \in \text{Rad}(R)$.

Beweis: Setze in (6.8) $R' = R$, $\mathfrak{a} = \text{Rad}(R)$.

Schliesslich folgt nun der gewünschte Satz:

(6.10) Ist R halblokal und charakterisch, so ist $\delta^*(R)$ das Maximum der Längen der R -quasiregulären Folgen aus $\text{Rad}(R)$.

Zu $\delta^*(R)$ sind wir gelangt, indem wir die flache, dominante R -Algebra R^* gewählt haben, und $\delta^*(R) = \delta(R^*)$ gesetzt haben. Nun ist es naheliegend, anstelle von R^* irgend eine flache, dominante R -Algebra $\hat{R}$ zu betrachten, und $\delta(\hat{R})$ zu untersuchen. Auf Grund des bisher Bewiesenen können wir nun zeigen:

(6.11) Ist R halblokal und charakteristisch und $\hat{R}$ eine noether'sche, flache, dominante R -Algebra, so gilt:

- a) $\delta^*(R) \leq \delta(\hat{R})$
- b) Ist $\hat{R}$ halblokal, so folgt $\delta^*(R) \leq \delta^*(\hat{R})$.

Beweis: Wegen $R \leq \hat{R}$ folgt $\text{Rad}(R) \subseteq \text{Rad}(\hat{R})$ ($\text{Rad}(\hat{R}^*)$, falls $\hat{R}$ halblokal ist) und die Behauptung folgt sofort mit (6.10), (6.2), (6.4) und (6.5), denn wir können eine R -quasireguläre Folge $(x_1, \dots, x_{\delta^*(R)})$ in $\text{Rad}(R)$ finden, und diese ist dann auch $\hat{R}$ resp. $\hat{R}^*$ -quasiregulär.

Leicht gelangen wir nun zu einer Aussage über das Verhalten von $\delta^*(R)$ bei Lokalisierung.

(6.12) Ist R halblokal und charakteristisch, so ist $\delta^*(R_{\mathfrak{p}}) \geq \delta^*(R) - \dim(R/\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$. Insbesondere ist $\Delta^*(R_{\mathfrak{p}}) \leq \delta^*(R)$.

Beweis: Nach (6.8) gibt es Elemente $x_1, \dots, x_{\delta^*(R) - \dim(R/\mathfrak{p})}$, die eine R -quasireguläre Folge bilden. Nach (6.3) a) bilden sie somit auch eine $R_{\mathfrak{p}}$ -quasireguläre Folge, und nach (6.5) ist $\delta^*(R_{\mathfrak{p}}) \geq \delta^*(R) - \dim(R/\mathfrak{p})$. Insbesondere ist $\Delta^*(R_{\mathfrak{p}}) = -\Delta^*(R) + \dim(R/\mathfrak{p}) = \text{rg}(\mathfrak{p}) - \delta^*(R_{\mathfrak{p}}) \leq \text{rg}(\mathfrak{p}) - \delta^*(R) + \dim(R/\mathfrak{p}) \leq \dim(R) - \delta^*(R) = \Delta^*(R)$.

7. Lokalitäten

Sei R ein Integritätsbereich. Einen lokalen Integritätsbereich R' , der R umfasst und der sich als Lokalisierung einer endlichen R -Algebra schreiben lässt, nennen wir nach Nagata eine Lokalität über R (s. [2], Chap. VI).

Wir wollen nun beweisen:

(7.1) Ist R ein halblokal Integritätsbereich und R' eine Lokalität über R , so gilt: $\Delta^*(R') \leq \Delta^*(R)$.

Wir können R' schreiben als $R''_{\mathfrak{g}''}$, wo $\mathfrak{g}'' \in \text{Spec}(R'')$ und $R'' = R[x_1, \dots, x_n]$ ein Integritätsbereich ist. Für $R'' = R$ folgt die Behauptung nun sofort mit (6.12). Sofort ist nun auch klar dass R' auch eine Lokalität über dem lokalen Integritätsbereich $\hat{R} = R[x_1]_{\mathfrak{g}'' \cap R[x_1]}$ ist, und dass $\hat{R}$ eine Lokalität über R ist.

Wir können uns somit nach Induktion auf den Fall $n = 1$ beschränken. Weiter folgt dann aus (6.12), dass es genügt, den Fall zu untersuchen, wo $\mathfrak{g}''$ maximal ist. Das heisst es ist zu beweisen:

(7.2) Ist R ein lokaler Integritätsbereich, $\hat{R} = R[x]$ ein Integritätsbereich und $\hat{\mathfrak{m}}$ ein über dem Maximalideal $\mathfrak{m}$ von R liegendes Maximalideal von $\hat{R}$, so gilt $\Delta^*(\hat{R}_{\hat{\mathfrak{m}}}) \leq \Delta^*(R)$.

Zum Beweis von (7.2) unterscheiden wir 2 Fälle:

- (7.3) (I) x ist transzendent über R .
 (II) x ist algebraisch über R .

(I): Wegen $\hat{\mathfrak{m}} \cap R = \mathfrak{m}$ können wir schreiben $\hat{\mathfrak{m}} = R[x] + f(x)R[x]$, wobei $f(x) \in R[x]$ ein Polynom von positivem Grad mit lauter Einheiten als Koeffizienten ist.

Dann ist $f(x)$ ebenfalls transzendent über R , und wir setzen $\tilde{R} = R[f(x)]$. So ist $\hat{\mathfrak{m}} \cap \tilde{R} = R[f(x)] + f(x)R[f(x)]$ ein Maximalideal von $\tilde{R}$, das über $\mathfrak{m}$ liegt. Weil $f(x)$ monisch ist, ist $\hat{R}$ ganz über $\tilde{R}$.

Sei nun $\hat{\mathfrak{M}} = \hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{R}$ und $\hat{R} - \hat{\mathfrak{M}} = S$. Dann ist $\hat{R}_S$ eine endliche, ganze Erweiterung von $\hat{R}_{\hat{\mathfrak{M}}}$. Nach (1.11) a) und b) und [2] (18.12) ist deshalb $(\hat{R}_S)^*$ eine endliche, ganze, torsionsfreie Erweiterung von $(\hat{R}_{\hat{\mathfrak{M}}})^*$, und nach (2.2) b) ist $\Delta^*(\hat{R}_S) \leq \Delta^*(\hat{R}_{\hat{\mathfrak{M}}})$. Andererseits ist $\hat{R}_S$ halblokal, und $\hat{\mathfrak{M}}_S$ ein Maximalideal von $\hat{R}_S$. Nach (2.6) c) folgt daraus, dass $\Delta^*(\hat{R}_{\hat{\mathfrak{M}}}) = \Delta^*((\hat{R}_S)_{\hat{\mathfrak{M}}_S}) \leq \Delta^*(\hat{R}_S)$. Wir haben also zu zeigen: $\Delta^*(\hat{R}_{\hat{\mathfrak{M}}}) \leq \Delta^*(R)$.

Das heisst nun aber, dass wir uns auf den Fall $\hat{\mathfrak{M}} = \hat{\mathfrak{m}}R[x] + xR[x]$ beschränken können.

Wegen $R = R[x]/xR[x]$ finden wir nach (6.6) Elemente

$x_1, \dots, x_{\delta^*(R)}$ in $\hat{\mathfrak{M}}$, also auch in $\hat{\mathfrak{m}}$, die eine R -quasireguläre Folge bilden, mithin also auch eine $R[x]/xR[x]$ -quasireguläre. Wegen $x \in \text{NNT}(R[x])$ ist somit $x, x_1, \dots, x_{\delta^*(R)}$ eine $\hat{R}$ -quasireguläre Folge aus $\hat{\mathfrak{m}}$. Nach (6.2) a) ist diese Folge auch $\hat{R}_{\hat{\mathfrak{M}}}$ -quasiregulär. Nach (6.5) folgt daraus $\delta^*(R) + 1 \leq \delta^*(\hat{R}_{\hat{\mathfrak{M}}})$, und wegen $\dim(\hat{R}_{\hat{\mathfrak{M}}}) = \text{rg}(\hat{\mathfrak{m}}) = \text{rg}(\mathfrak{m}) + 1 = \dim(R) + 1$ folgt die Behauptung.

(II): x genüge der algebraischen Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ über R , wobei $a_n \neq 0$. Dann gilt offenbar:

$$(a_n x)^n + a_{n-1} a_n (a_n x)^{n-1} + \dots + a_0 (a_n)^n = 0.$$

$a_n x$ ist somit ganz über R . Wieder nach (1.11) a) und b) und [2] (18.12) ist deshalb $(R[a_n x])^*$ eine endliche, ganze, torsionsfreie Erweiterung von R^* , und nach (2.2) b) erhalten wir $\Delta^*(R[a_n x]) = \Delta^*(R)$. Nach (1.3) f) folgt aus $\hat{\mathfrak{m}} \cap R[a_n x] \cap R = \hat{\mathfrak{m}}$, dass $\hat{\mathfrak{m}}' = \hat{\mathfrak{m}} \cap R[a_n x]$ ein Maximalideal von $R[a_n x]$ ist. Nach (2.6) folgt somit $\Delta^*(R[a_n x]_{\hat{\mathfrak{m}}'}) \leq \Delta^*(R[a_n x])$, und wir können uns darauf beschränken, $\Delta^*(\hat{R}_{\hat{\mathfrak{M}}}) \leq \Delta^*(R[a_n x]_{\hat{\mathfrak{m}}'})$ nachzuweisen. Da offenbar $\hat{R} \subseteq Q(R[a_n x])$, genügt es mithin, den Fall zu studieren, dass $x \in Q(R)$.

(7.4) Ist R halblokal und charakteristisch, $x \in Q(R)$ und $\hat{\mathfrak{m}} \subseteq R[x] = \hat{R}$ ein Maximalideal von $\hat{R}$ derart, dass $\hat{\mathfrak{m}} \cap R$ ein Maximalideal von R ist, so gilt $\delta^*(\hat{R}_{\hat{\mathfrak{M}}}) \geq \delta^*(R)$.

Beweis: (Induktion nach $\delta^*(R)$) Ist $\delta^*(R) = 0$, so ist nichts zu beweisen. Ist $\delta^*(R) = 1$, so finden wir nach (2.3) b) und (2.1) b) ein $y \in \text{NNT}(R) \cap \text{Rad}(R)$, und wegen $\hat{R} \subseteq Q(R)$, $\text{Rad}(R) \subseteq \hat{m}$ folgt $y \in \text{NNT}(\hat{R}_{\hat{m}}) \cap \text{Rad}(\hat{R}_{\hat{m}})$. Nach (2.3) b) und (2.1) b) ist $\delta^*(\hat{R}_{\hat{m}}) \geq 1$.

Ist $\delta^*(R) > 1$, so schreiben wir $x = \frac{r}{s}$ mit $r \in R$ und $s \in \text{NNT}(R)$. Nach (5.3) finden wir eine endliche, ganze Erweiterung R' von R in der R derart, dass für alle $a' \in \text{NNT}(R')$ gilt $\delta(R'/a'R') \geq \delta^*(R) - 1$. Nach (2.4) b) gilt dann $\delta^*(R') = \delta^*(R)$, und nach (5.1) b) ist R' wiederum charakteristisch. Zudem ist $R'[x]$ endlich und ganz über $\hat{R}$, also $R'[x]_{\hat{R}-\hat{m}}$ endlich und ganz über $\hat{R}_{\hat{m}}$. Offenbar sind die Maximalideale von $R'[x]_{\hat{R}-\hat{m}}$ deshalb genau die Ideale $\hat{m}' R'[x]_{\hat{R}-\hat{m}}$, wo $\hat{m}'$ ein über $\hat{m}$ liegendes Maximalideal von $R'[x]$ ist. (s. (1.3) a), b) und f)). Nach (3.6) a) ist somit $\delta^*(R'[x]_{\hat{R}-\hat{m}}) = \delta^*(R'[x]_{\hat{m}'})$ für ein geeignetes $\hat{m}'$ dieser $\hat{m}'$. Da nach (2.4) a) $\delta^*(\hat{R}_{\hat{m}}) \geq \delta^*(R'[x]_{\hat{R}-\hat{m}})$, genügt es somit zu zeigen, dass alle $\delta^*(R'[x]_{\hat{m}'}) \geq \delta^*(R')$. Weil $\hat{m}'$ über $\hat{m}$ liegt, folgt schliesslich $\hat{m}' \cap R = \hat{m}$ und nach (1.3) f) sieht man daraus, dass $\hat{m}' \cap R'$ ein Maximalideal von R' ist. Das heisst nun aber, dass wir o.B.d.A. annehmen können, dass $R = R'$.

Nach (6.7) finden wir nun ein $c \in \text{Rad}(R) \cap \text{NNT}(R)$ derart, dass R/cR charakteristisch, $s \in \text{NNT}_{\hat{R}}(R/cR)$ und $\delta^*(R/cR) = \delta^*(R) - 1$. Wir setzen $\bar{R} = R/cR$. Wegen $s \in \text{NNT}_{\hat{R}}(R/cR)$ folgt nun $cR \subseteq \bar{R} \subseteq c\hat{R} \cap R = cR[x] \cap R \subseteq cR[\frac{1}{s}] \cap R = cR$, mithin also $cR = c\hat{R} \cap R$. Es ist also $s \in \text{NNT}_{\bar{R}}(R/c\hat{R} \cap R)$, und nach (1.2) c) folgt $\hat{R}/c\hat{R} \subseteq Q(R/c\hat{R} \cap R) = Q(R)$. Schliesslich ist auch klar, dass $\bar{m} = \hat{m}/c\hat{R}$ ein Maximalideal von $\hat{R}/c\hat{R} = \bar{R}$ ist, und dass $\bar{m} \cap \bar{R} = \hat{m}/c\hat{R} = \bar{m}$ und dass $\bar{m}$ ein Maximalideal von $\bar{R}$ ist. Da weiter $\hat{R}$ über R einfach erzeugt ist, folgt nach Induktionsvoraussetzung, dass $\delta^*(\bar{R}) \leq \delta^*(\bar{R}_{\bar{m}}) = \delta^*(\hat{R}_{\hat{m}}/c\hat{R}_{\hat{m}})$. Nun ist $c \in \text{NNT}(\hat{R}_{\hat{m}}) \cap \text{Rad}(\hat{R}_{\hat{m}})$ (denn es ist $\hat{R}$ torsionsfrei über R und $c \in \hat{m}$), und nach (2.4) b) folgt daraus $\delta^*(\hat{R}_{\hat{m}}/c\hat{R}_{\hat{m}}) < \delta^*(\hat{R}_{\hat{m}}) - 1$. Wegen $\delta^*(\bar{R}) = \delta^*(R) - 1$ erhalten wir daraus aber sofort $\delta^*(R) \leq \delta^*(\hat{R}_{\hat{m}})$.

Wir erledigen nun den Fall (II), indem wir zeigen, dass $\dim(\hat{R}_m) \leq \dim(R)$. Wegen $\dim(\hat{R}_m) = \text{rg}(\hat{m}) \leq \dim(\hat{R})$ genügt es, $\dim(\hat{R}) \leq \dim(R)$ zu beweisen. Tatsächlich können wir nun schreiben $\hat{R} = R[X]/\alpha$, wo X eine Unbestimmte, und α ein Ideal von $R[X]$ mit $sX - r \in \alpha$ ist. aus $s \in \text{NNT}(R)$ folgt dann $sX - r \in \text{NNT}(R[X])$, und es wird $\dim(\hat{R}) = \dim(R[X]/\alpha) \leq \dim(R[X]/(sX-r)R[X]) = \dim(R[X]) - 1 = \dim(R)$.

Wir erhalten also:

(7.5) Unter den in (7.4) gemachten Voraussetzungen gilt

$$\Delta^*(\hat{R}_m) \leq \Delta^*(R).$$

Literatur

- [1] H.Matsumura: Commutative Algebra, Nagoya, 1969;
Math. Lecture Note Series, W. A. Benjamin,
New York, 1970.
- [2] M.Nagata: Local Rings, Kyoto, 1960;
Interscience Publishers, New York, 1960.
- [3] M.Nagata: On the Chain Problem of prime Ideals,
Nagoya Math. Journal, Vol. 10, 1956.
- [4] J.P.Serre: Algèbre locale, Multiplicités,
Lecture Notes in Mathematics, Vol.11,
Springer Verlag, 1965.
- [5] O.Zariski- Commutative Algebra, Vol. I & II,
P.Samuel : D. van Nostrand Company, Princeton, 1960.
- [6] U.Schweizer: Primidealketten,
Dissertation, Basel, 1972.
- [7] D.Mumford: Introduction to Algebraic Geometry.

Curriculum Vitae

Am 19. Juni 1945 wurde ich, Markus Peter Brodmann, Bürger von Ettingen BL, als Sohn der Margarethe Brodmann, geborene Kron und des Peter Brodmann in Basel geboren. Ich wuchs bei meinen Eltern in Ettingen auf. Mein Vater ist an der Realschule Therwil als Lehrer tätig.

Die Primarschule absolvierte ich 1952-1957 in Ettingen, worauf ich bis 1961 die Realschule in Therwil besuchte. Im Frühjahr 1961 trat ich bei der Firma Fr. Sauter AG in Basel in eine Maschinenzeichnerlehre ein. Im Herbst 1962 brach ich diese Lehre ab und trat in die fünfte Klasse des Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Gymnasiums in Basel ein, das ich im Frühjahr 1966 mit der Matur Typus C verliess.

Anschliessend immatrikulierte ich mich an der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel und belegte das Hauptfach Mathematik und die Nebenfächer Physik und Astronomie.

Im Herbst 1968 bestand ich die Vordiplomprüfung und am 15. September 1971 erhielt ich das Diplom. Seit 1970 bin ich als Assistent am Mathematischen Institut tätig.

Herr Prof. Dr. W. Habicht brachte mir in seinen Vorlesungen die Grundkenntnisse der kommutativen Algebra bei und leitete mich bei der vorliegenden Arbeit an.

Meine Ausbildung genoss ich bei den folgenden Herren Professoren und Dozenten:

K. Alder, W. Becker, M. Eichler, F. Fricker, W. Habicht, H. Huber, P. Huber, H. Kappus, E. Miescher, H. Rudin, B. Scarpellini, U. Steinlin und R. Wagner.

